Konversatorium Kunst des Problemlösens SoSe 22

Theresia Eisenkölbl, Christian Krattenthaler, Leo Summerer

Aufgabe 1. Anna und Karl spielen ein Spiel, bei dem es darum geht ein Polynom P von fixem Grad $d \geq 2$ aus $\mathbb{Z}[X]$ zu bestimmen. Dazu legen sie abwechselnd einen der nicht in einem vorhergehenden Spielzug schon bestimmten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_d$ fest. Es stehen jeweils alle ganzen Zahlen zur Verfügung, lediglich für a_0 und a_d ist es nicht erlaubt, 0 zu wählen. Wenn alle Koeffizienten nach $d+1$ Spielzügen bestimmt sind, d.h. das Polynom P festgelegt ist, hat Karl gewonnen, wenn P eine rationale Nullstelle besitzt; ist dies nicht der Fall, so ist Anna Siegerin.
Zeige, dass Anna bzw. Karl genau dann den Sieg erzwingen können, wenn sie für die Wahl des letzten freien Koeffizienten am Zug sind.

Aufgabe 2. Sei n eine positive ganze Zahl. Eine Lichterkette besteht aus n Lampen, die alle einzeln mit einem Ein-Aus Schalter versehen sind. Im Ausgangszustand sind alle Lampen ausgeschaltet. Jeden Abend wird eine festgelegte Anzahl von Schaltern je einmal bedient: am ersten Abend genau einer, am zweiten Abend genau zwei, ..., am $n-$ten Abend genau n.Ziel ist es, an einem der Abende nach Betätigung der Schalter alle Lampen eingeschaltet zu haben. Bestimme, für welche n dies möglich ist.

Aufgabe 3. Let the sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be determined by $a_1 = 1$ and

$$a_{n+1} = a_n(n + 1 - gcd(n, a_n))$$

for $n \geq 1$. Prove that $a_{n+1} = na_n$ iff $n \in \mathbb{P} \cup \{1\}$.

Aufgabe 4. Für welche ganzen Zahlen n kann man die Menge $S := \{1, 2, \ldots, n\}$ so in zwei Teilmengen A und B aufspalten, dass $A \cup B = S$ und

$$\sum_{x\in A} x = \prod_{y\in B} y.$$

Aufgabe 5. The department of road constructions of a country with $n \geq 2$ large cities has to build roads that connect these cities. The law in this country imposes the following constraint: it is forbidden to construct a road between cities A and B if there exists a city C such there is a road between A and C and a road between B and C. Determine the maximum number of roads that can be constructed in the country.

Aufgabe 6. Die arithmetische Progression $kn + l$ enthält sicher keine vollständigen Potenzen ganzer Zahlen, falls eine Primzahl p existiert mit

$$p \mid l, \ p^2 \nmid l \text{ und } p^2 \mid k.$$

Gibt es nicht-konstante potenzfreie arithmetische Progressionen, die nicht von dieser Bauart sind?

Aufgabe 7. Determine a real root of the polynomial $X^5 - 15X^3 + 45X - 36$.

Aufgabe 8. Let $\mathbb{N}$ be the set of positive integers, E the set of all even positive integers, and O the set of all odd positive integers. A set $S \subseteq \mathbb{N}$ is closed if $x + y \in S$ for all distinct $x, y \in S$, and unclosed if $x + y \notin S$ for all distinct $x, y \in S$. Prove that if $\mathbb{N}$ is partitioned into A and B, where A is closed and nonempty, and B is unclosed and infinite, then $A = E$ and $B = O$.

Aufgabe 9. Prove that $Q(n) + Q(n^2) + Q(n^3)$ is a perfect square for infinitely many positive integers n that are not divisible by 10, where $Q(n)$ is the sum of the digits of n.

Aufgabe 10. a, b, c, d seien nichtnegative reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 4$. Man zeige:

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{cd} + c\sqrt{da} + d\sqrt{ab} \leq 2(1 + \sqrt{abcd}).$$

Aufgabe 11. Sei $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ ein reelles Polynom mit positiven Koeffizienten und lauter reellen Nullstellen. Man zeige:

$$\sqrt[n]{P(1)P(2)\cdots P(n)} \geq (n+1)!.$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 12. Sei a eine reelle Zahl mit $0 \leq a \leq 59$. Zeige, dass

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-6) = a(x^2 - 7x) + 720$$

genau zwei reelle Lösungen besitzt.

Aufgabe 13. Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f(f(x)) = -x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass eine solche Funktion nicht stetig sein kann.

Aufgabe 14. Show that for each positive integer n,

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{lcm}(1, 2, ..., \lfloor n/i \rfloor).$$

Aufgabe 15. Anton und Barbara spielen folgendes Spiel: in der Ebene sind zwei konzentrische Kreise mit Mittelpunkt im Ursprung als Spielfeld vorgezeichnet mit je 140 äquidistanten Punkten auf den Kreisen, die so angeordnet sind, dass je ein Punkte am inneren und einer am äusseren Kreis auf einem gemeinsamen Halbstrahl vom Ursprung liegen. Anton darf 140 Einser und 140 Nullen ganz nach seinem Wunsch auf die Punkte setzen. Zwei unterschiedliche Zahlen auf demselben Halbstrahl werden als gutes Paar bezeichnet. Barbara kann nun den inneren Kreis beliebig weit drehen, unter der Bedingung, dass nach Drehung wieder jeder Halbstrahl durch einen der markierten Punkte des inneren Kreises auch durch einen solchen des äusseren Kreises geht, sodass erneut 140 Zahlenpaare entstehen.
Wenn Barbara durch Drehung erreichen kann, dass die daraus resultierende Konfiguration mindestens 70 gute Zahlenpaare beinhaltet, so gewinnt sie das Spiel, andernfalls ist Anton Sieger. Wer gewinnt das Spiel?

Aufgabe 16. Seien $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ die Primzahlen, die in der unendlichen arithmetischen Progression $(an+b)_{n\geq 1}$ mit $(a,b)=1$ vorkommen.
Zeige, dass

$$0,p_1p_2p_3\dots$$

irrational ist.

Aufgabe 17. Show that $x^x \leq x^2 - x + 1$ for $x \in [0,1]$.

Aufgabe 18. In einem Kreis sind n Schachteln angeordnet, die insgesamt k Kugeln enthalten. Ein Zug besteht darin, eine Schachtel zu leeren und die Kugeln dann beginnend mit dem Nachbarn der leeren Schachtel im Uhrzeigersinn einzeln zu verteilen.

a. Zeige: Wenn nach dem ersten Zug immer mit der Schachtel weitergespielt wird, die die letzte Kugel des vorherigen Zuges erhalten hat, dann muss irgendwann wieder die Anfangskonfiguration erreicht werden.

b. Wenn es erlaubt ist, in jedem Zug eine beliebige Schachtel zu wählen, ist es dann möglich, jede beliebige Konfiguration zu erreichen?

Aufgabe 19. Let f be a continuous function on $[0,1]$ such that for every $x \in [0,1]$ we have

$$\int_x^1 f(t)dt \geq (1-x^2)/2$$

Show that

$$\int_0^1 f^2(t)dt \geq \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 20. Bestimme die kleinste Konstante C für die gilt:

$$(a^7 + b^7 + c^7)^6 \leq C(a^6 + b^6 + c^6)^7$$

für alle reellen a, b, c, die $a + b + c = 0$ erfüllen.

Aufgabe 21. Let f and g be two nonzero polynomials with integer coefficients and $\deg f > \deg g$. Suppose that for infinitely many primes p the polynomial $pf + g$ has a rational root. Prove that f has a rational root.

Aufgabe 22. Let k and n be fixed positive integers. In the liar's guessing game, Amy chooses integers x and N with $1 \leq x \leq N$. She tells Ben what N is, but not what x is. Ben may then repeatedly ask Amy whether $x \in S$ for arbitrary sets S of integers. Amy will always answer with yes or no, but she might lie. The only restriction is that she can lie at most k times in a row. After he has asked as many questions as he wants, Ben must specify a set of at most n positive integers. If x is in this set he wins; otherwise, he loses. Prove that:

a. If $n \geq 2^k$ then Ben can always win.

b. For sufficiently large k there exist $n \geq 1.99^k$ such that Ben cannot guarantee a win.

Aufgabe 23. Let $M_n(\mathbb{R})$ denote the set of all real $n \times n$-matrices. Find all surjective functions $f : M_n(\mathbb{R}) \to \{0, 1, \ldots, n\}$ which satisfy

$$f(XY) \leq \min(f(X), f(Y))$$

for all $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe 24. Find all polynomials P with integer coefficients such that $P(0) \neq 0$ and $P^n(m) \cdot P^m(n)$ is a square of an integer for all nonnegative integers n, m.

Remark: For a nonnegative integer k and an integer n, $P^k(n)$ is defined as follows: $P^k(n) = n$ if $k = 0$ and $P^k(n) = P(P^{k-1}(n))$ if $k > 0$.

Aufgabe 25. Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^2+1} dx.$$

Aufgabe 26. Seien a, b, c positive ganze Zahlen mit $a \mid b^5$, $b \mid c^5$ und $c \mid a^5$. Bestimme das kleinste n für das $abc \mid (a+b+c)^n$.

Aufgabe 27. Determine the number of positive integer solutions of the equation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z},$$

where y is the product of exactly three distinct primes.

Aufgabe 28. $(x_k)_{k\geq 1}$ bezeichne eine streng monoton wachsende Folge positiver ganzer Zahlen. Zeige, dass

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $x_k = k$ für $k = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 29. Berechne

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdydz}{x+y+z}.$$

Aufgabe 30. Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be continuously differentiable and set

$$x_n := f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Compute $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)$.

Aufgabe 31. Gibt es einen injektiven Homomorphismus $(\mathbb{Q}^+, \cdot) \to (\mathbb{Q}, +)$?

Aufgabe 32. Bestimme alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$(x+y+z)^3 = 24xyz.$$

Aufgabe 33. Find all $\alpha > 0$ for which the series below is convergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^\alpha + \cos n}.$$

Aufgabe 34. Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be differentiable on $[a,b]$ with $f'(a) = f'(b)$. Show the existence of some $c \in (a,b)$ with

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Aufgabe 35. Let m be a fixed positive integer, and consider the following game. At each move, you pick uniformly at random an integer $0 \le k \le m$. Then you score k points, but only if k does not exceed the smallest previously picked number (otherwise you don't score any points on that move). For example, if $m = 3$ and your random numbers are 2, 3, 1, 2, 1, 0, 3, ... then you score only on the 1st, 3rd and 5th move and don't score anything after the 5th move, so your total score is $2 + 1 + 1 = 4$.

a. How much will you score on average if you play indefinitely?

b. Let $a(n,m)$ be the average amount you score in n steps. Find an explicit formula for $a(n,1)$ and $a(n,2)$. Finite sums are allowed.

c. Find an explicit formula for $a(n,m)$. Finite sums are allowed.

Aufgabe 36. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) = \gamma$, wobei $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \log n \right)$ die Euler-Mascheroni-Konstante ist.

Aufgabe 37. Let $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ be the set of all positive integers. Find all functions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ such that for any positive integers a and b, the following two conditions hold:

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, and

(2) at least two of the numbers $f(a)$, $f(b)$ and $f(a+b)$ are equal.