- Kapitel E §4 – Aspekte und Grundvorstellungen zur Differentialrechnung
- Kapitel E §5 – Kurvendiskussion
- Kapitel F §1 – Integralrechnung in Lehrplänen und bei der SRDP

Aspekte und Grundvorstellung zur Differenzialrechnung

- Zwei Aspekte
- Vier Grundvorstellungen

Beziehung zwischen Aspekten und Grundvorstellungen

Aspekte in der Differenzialrechnung

- **Aspekt 1: Grenzwert des Differenzenquotienten**
  - Zugang über das Tangentenproblem:
    Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt mittels Tangente → Die Tangente als Grenzlage von Sekanten → Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert des Differenzenquotienten
  - Zugang über die Momentangeschwindigkeit:
    Kontext → zurückgelegter Weg in Zeitintervallen → mittlere Geschwindigkeit in Zeitintervallen (Differenzenquotienten) → Frage nach der Momentangeschwindigkeit mit der Annäherung über mittlere Geschwindigkeit → (intuitiv) Grenzwert des Differenzenquotienten

Aspekte in der Differenzialrechnung

Aspekt 2: Lokale lineare Approximation

- Analog zur fachlichen Begriffsbestimmung (§2) – linearen Bestapproximation
- Idee: eine Funktion f in x_0 möglichst gut durch eine Gerade anzunähern,
  → über den Differenzenquotienten zum Grenzwert des Differenzenquotienten
  → mathematische Faktenbox 18

→ Gerade durch (x_0, f(x_0)) mit der

Steigung $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
approximiert in der Nähe von (x_0, f(x_0)) die Funktion f besonders gut.

Mathematische Faktenbox 18: Differenzierbarkeit und Ableitung

2.1.8. Definition (diffenzierbare Funktion). Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* in einem Punkt x_0 im Intervall I, falls

$$\lim_{x \neq x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{oder, was dasselbe ist,} \quad \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(E.13)}$$

existiert und endlich ist.
Diesen Grenzwert nennen wir die *Ableitung* der Funktion f an der Stelle (bzw. im Punkt) x_0 und bezeichnen sie mit $f'(x_0)$. Ist f in jedem Punkt $x_0 \in I$ diffenzierbar, dann nennen wir f (global) diffenzierbar auf I. In diesem Fall nennen wir die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ (erste) *Ableitungsfunktion* von f.

Fachliche Begriffsbestimmung und Mathematikunterricht

- Fachliche Begriffsbestimmung nicht ohne
  - Stetigkeit
  - Funktionsgrenzwert

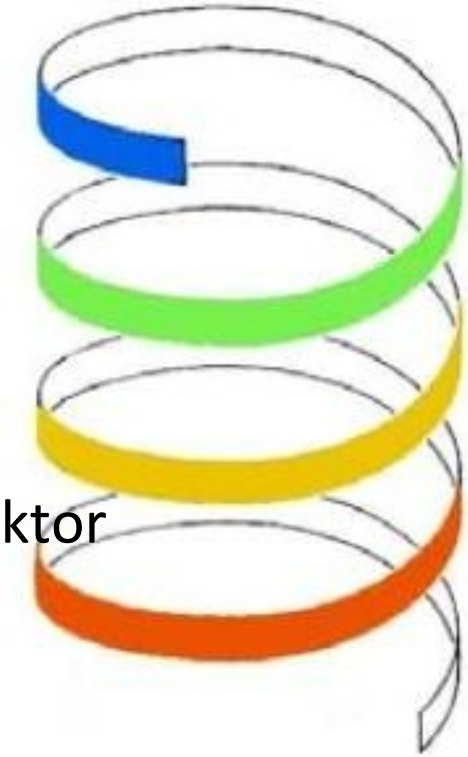
- Mathematikunterricht (der AHS)
  - „Begriff Stetigkeit kennen und erläutern können“ (Lehrplan AHS)
  - gegebenenfalls den „Begriff Differenzierbarkeit sowie den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit kennen“ (Lehrplan AHS)

Grundvorstellungen zur Differenzialrechnung

- Lokale Änderungsrate
- Tangentensteigung
- Lokale Linearität
- Ableitung als Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen

Grundvorstellungen: Lokale Änderungsrate

- … eine GV, die nicht erst bei der Differenzialrechnung berücksichtigt wird!
  - bereits in der 9. und 10. Schulstufe anbahnen
  - Schülerinnen und Schüler bringen dann zur Diff.-Rechnung vielfältige Erfahrungen zur Beschreibung von Änderungsprozessen mit.
- Lehrplan AHS (6. Klasse – Kompetenzmodul 3):
  - Änderungen von Größen durch Änderungsmaße beschreiben können (absolute und relative Änderung, mittlere Änderungsrate, Änderungsfaktor
- Lehrplan AHS (7. Klasse):
  - Den Differenzenquotienten (die mittlere Änderungsrate) und den Differentialquotienten (die lokale bzw. momentane Änderungsrate) definieren können“



Änderungsmaße und Schulbücher (6. Klasse AHS)

Definition Sei f eine auf einem Intervall [a; b] definierte reelle Funktion. Die reelle Zahl

- $f(b) - f(a)$ heißt **absolute Änderung** (oder kurz **Änderung**) **von f in [a; b]**,
- $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$ heißt **relative Änderung von f in [a; b]**,
- $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ heißt **mittlere Änderungsrate** (oder **Differenzenquotient**) **von f in [a; b]**,
- $\frac{f(b)}{f(a)}$ heißt **Änderungsfaktor von f in [a; b]**.

In Worten:

- Die **absolute Änderung** ist gleich der Differenz der Funktionswerte.
- Die **relative Änderung** ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zum Ausgangsfunktionswert.
- Die **mittlere Änderungsrate** (der **Differenzenquotient**) ist gleich dem Verhältnis der Änderung der Funktionswerte zur Änderung der Argumente.
- Der **Änderungsfaktor** gibt an, mit welchem Faktor der Ausgangsfunktionswert multipliziert wird, um den Endfunktionswert zu erhalten. [Es gilt nämlich: $f(a) \cdot \frac{f(b)}{f(a)} = f(b)$]

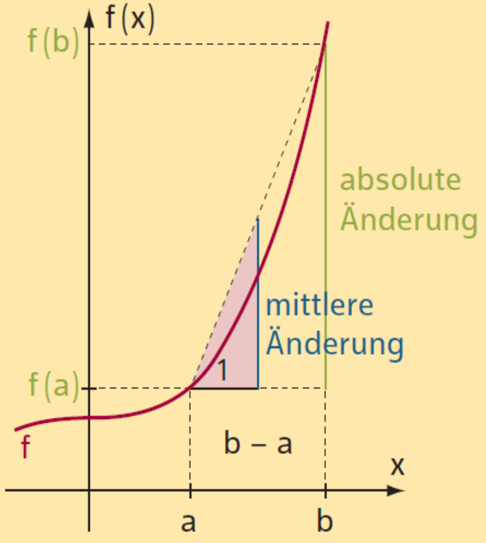
Mathematik verstehen (2015), Malle et al., S. 49

Änderungsmaße und Schulbücher (6. Klasse AHS)

Definition

Für eine reelle Funktion f, die auf dem Intervall [a; b] definiert ist, werden Änderungsmaße wie folgt festgelegt.

(1)	$f(b) - f(a)$	**Absolute Änderung** von f im Intervall [a; b]
(2)	$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	**Mittlere Änderung(srate)** von f im Intervall [a; b] Differenzenquotient im Intervall [a; b]
(3)	$\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$	**Relative Änderung** von f im Intervall [a; b]
(4)	$\frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \cdot 100$	**Prozentuelle Änderung** von f im Intervall [a; b]
(5)	$\frac{f(b)}{f(a)}$	**Änderungsfaktor** von f im Intervall [a; b] Der Änderungsfaktor ist jene reelle Zahl, mit der f(a) multipliziert werden muss, um f(b) zu erhalten.



Dimensionen Mathematik 6 (2018), Bleier et al., S. 150

Änderungsmaße und Schulbücher (6. Klasse AHS)

MERKE

Änderungsmaße

Sei f eine reelle Funktion, die auf dem Intervall [a; b] definiert ist. Dann bezeichnet man

- $f(b) - f(a)$ als die **absolute Änderung** von f in [a; b].
- $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ als die **mittlere Änderungsrate** (oder Differenzenquotient) von f in [a; b].
- $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$ als die **relative Änderung** von f in [a; b].
- $\frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \cdot 100$ als die **prozentuelle Änderung** von f in [a; b].

Lösungswege Mathematik Oberstufe 6 (2016), Freiler et al., S. 60

Grundvorstellungen: Lokale Änderungsrate

- Bildungstheoretische Orientierung der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung Mathematik:
  „Die Analysis stellt Konzepte zur formalen, kalkulatorischen Beschreibung von diskretem und stetigem Änderungsverhalten bereit, die nicht nur in der Mathematik, sondern auch in vielen Anwendungsbereichen von grundlegender Bedeutung sind. Die Begriffe Differenzenquotient bzw. Differenzialquotient sind allgemeine mathematische Mittel, dieses Änderungsverhalten von Größen in unterschiedlichen Kontexten quantitativ zu beschreiben, was in vielen Sachbereichen auch zur Bildung neuer Begriffe genutzt wird.“

Grundvorstellungen: Lokale Änderungsrate

- **SRP-Konzept im Abschnitt AN1 Änderungsmaße:**
  - AN-R 1.1 Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können
  - AN-R 1.2 Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane“ Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können
  - AN-R 1.3 Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können

Grundvorstellungen: Lokale Änderungsrate

- Setzt Wissen um mittlere Änderungsraten voraus
  - Mittlere Änderungsraten beziehen sich immer auf ein Intervall
  - Mittlere Änderungsraten könnten mithilfe des Differenzenqoutienten berechnet werden
- Intervall – mittlere Änderungsrate → Intervall verkleinern → eine Stelle – lokales Änderungsverhalten (vgl. Zugang über die Momentangeschwindigkeit)
- Mittlere Änderungsrate … Quotient
- Lokale Änderungsrate … Grenzwert eines Quotienten

Grundvorstellungen: Lokale Änderungsrate

Zu einer umfassend ausgeprägten Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate gehört die Entwicklung

- der Vorstellung von der Momentangeschwindigkeit bei Veränderungsprozessen (z. B. Bewegungsvorgängen),
- der Vorstellung von der Steigung einer Kurve in einem Punkt,
- der Vorstellung, dass die Änderung der Abhängigen *y* durch $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ gegeben ist.

Grundvorstellungen: Lokale Änderungsrate – fachdidaktische Forschung

Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern:

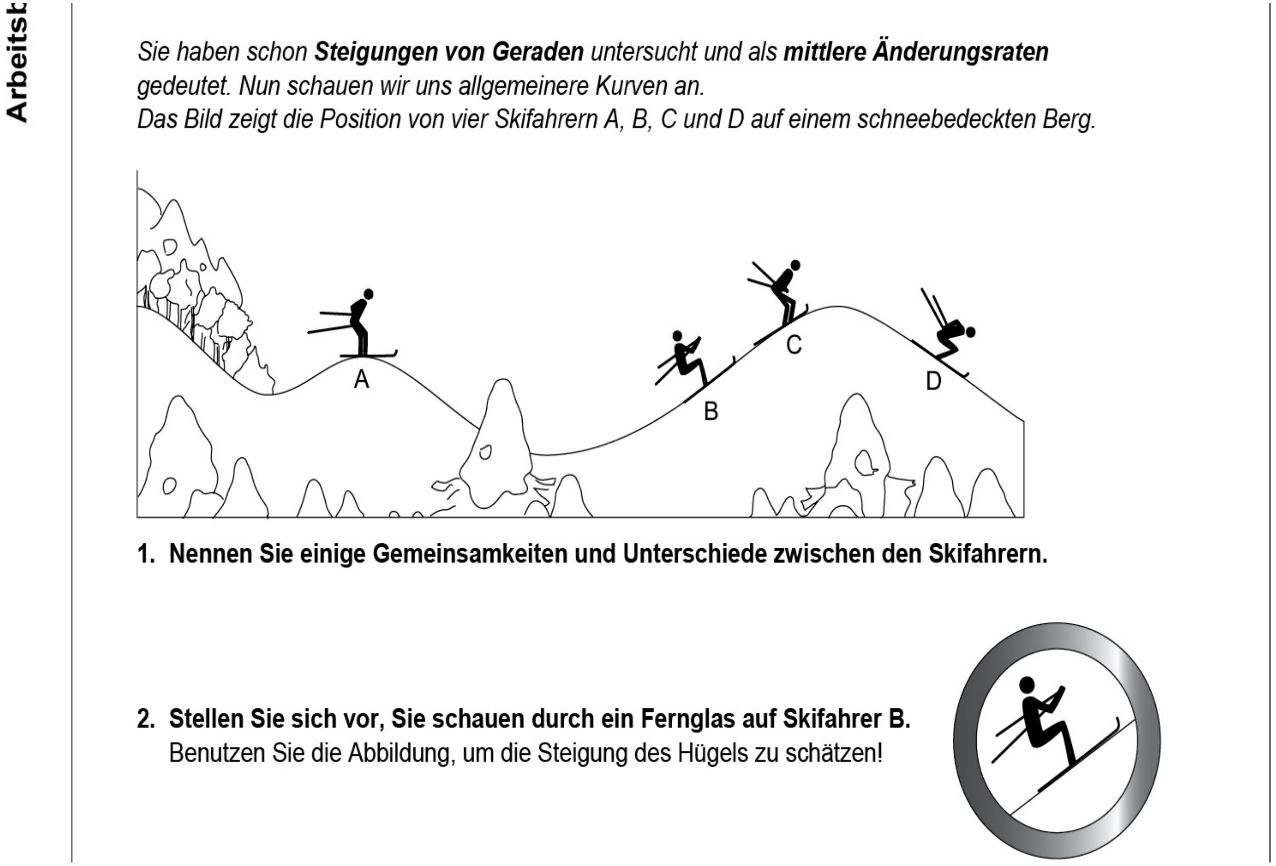
- die Änderungsrate wird durch eine einzige Größe repräsentiert
- die Änderungsrate setzt sich aus zwei Änderungen (Änderungen des x- und y-Wertes) zusammen
- manchmal repräsentiert auch nur der Berechnungsterm die Vorstellung
- Änderungsraten sind immer Konstanten
- Fehlender Zusammenhang zwischen mittlerer Änderungsrate – Intervall und lokale Änderungsrate – Stelle

Grundvorstellungen: Tangentensteigung

- Problematik des Zugangs über Tangentenproblem eingehend diskutiert
- Vorstellung vom geometrischen Tangentenbegriff → Schmiegegerade
  Tangente ist dann jene Gerade, die sich lokal dem Verlauf des Graphen anschmiegt
- Zur dieser Grundvorstellung auch noch die Vorstellung
  - Steigung der Tangente an eine Kurve in einem Punkt = gleiche Steigung wie die Kurve in diesem Punkt
- Dynamische Tangentenvorstellung
  - Idee: bewegt man sich längs des Graphen, dann kann die jeweils momentane Bewegungsrichtung durch die Tangentenrichtung angegeben werden

Grundvorstellungen: Tangentensteigung

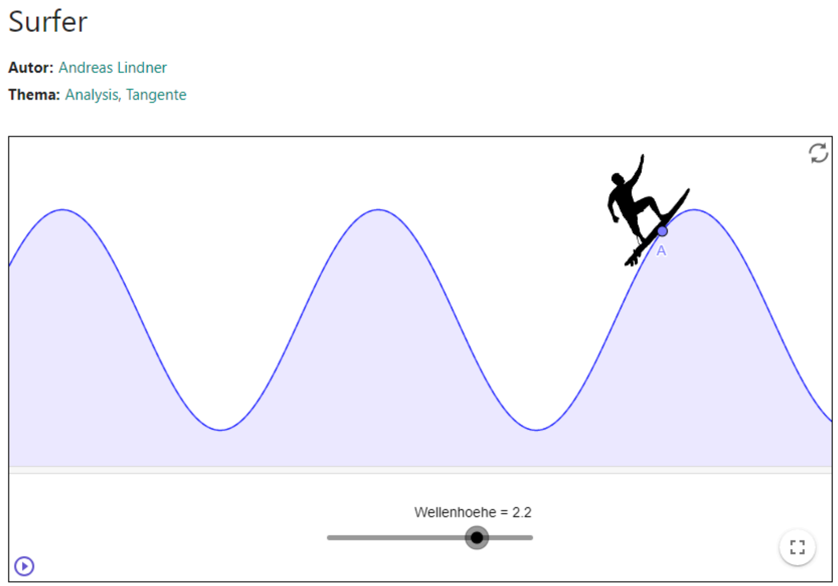
- Dynamische Tangentenvorstellung

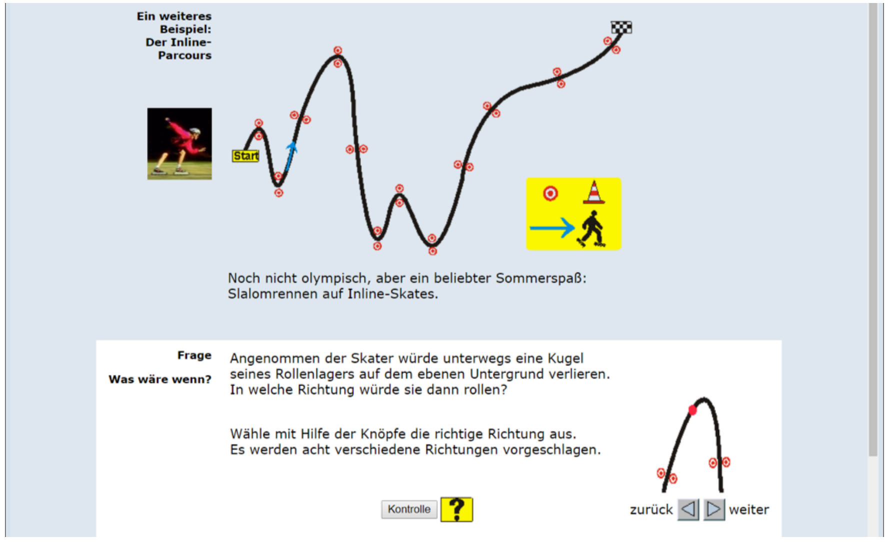


*Sie haben schon **Steigungen von Geraden** untersucht und als **mittlere Änderungsraten** gedeutet. Nun schauen wir uns allgemeinere Kurven an.*
Das Bild zeigt die Position von vier Skifahrern A, B, C und D auf einem schneebedeckten Berg.

1. Nennen Sie einige Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Skifahrern.

2. Stellen Sie sich vor, Sie schauen durch ein Fernglas auf Skifahrer B.
Benutzen Sie die Abbildung, um die Steigung des Hügels zu schätzen!





Grundvorstellungen: Tangentensteigung

Zu einer ausgeprägten Grundvorstellung der Tangentensteigung gehören insbesondere

- die Vorstellung von Tangenten als Schmieggeraden,
- die Vorstellung, dass die Tangente an eine Kurve in einem Punkt die gleiche Steigung wie die Kurve hat,
- die Vorstellung, dass die Tangente die lokale Richtung einer Kurve angibt.

Grundvorstellungen: Lokale Linearität

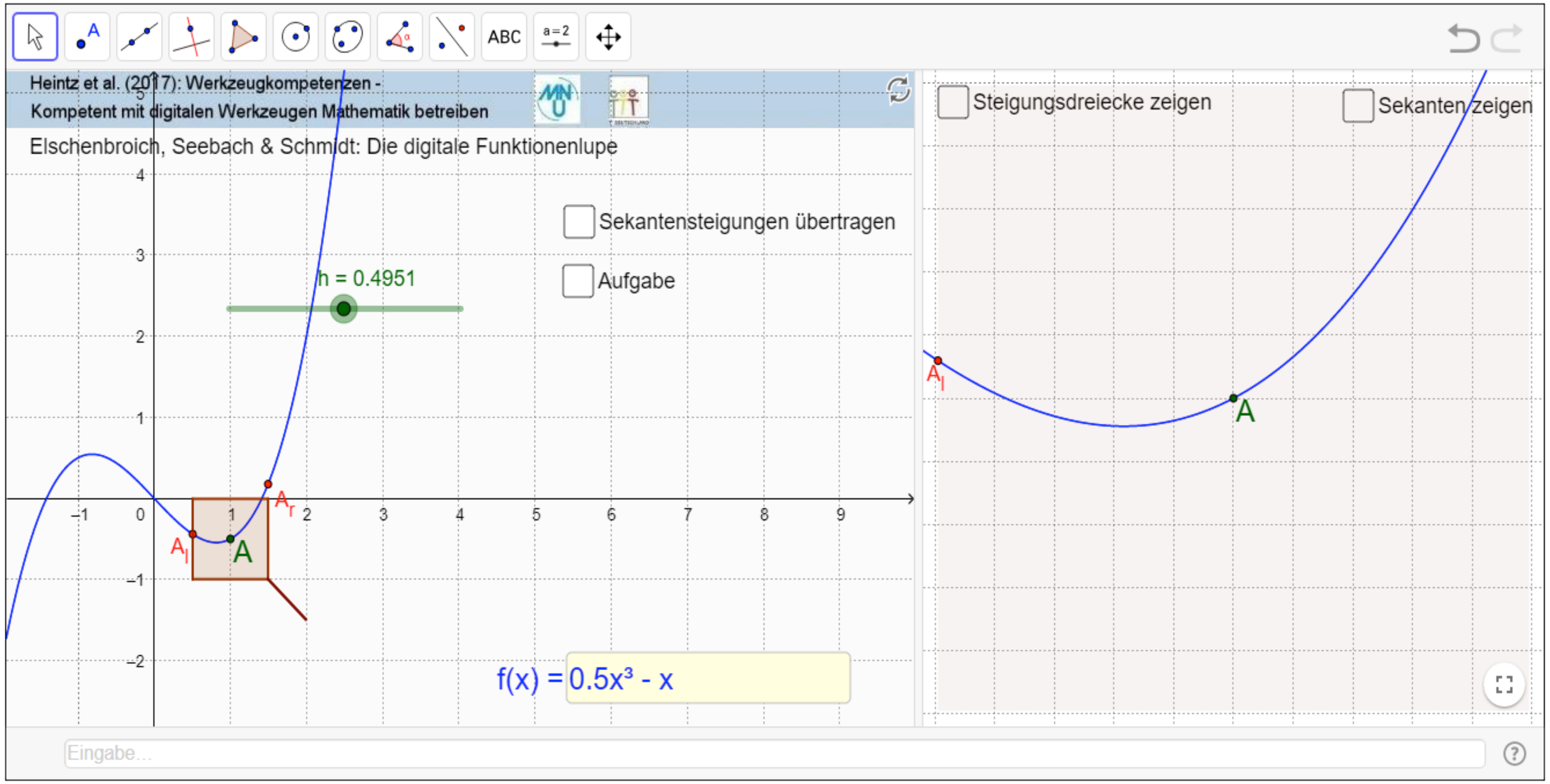
- Glatte Kurve lokal als geradlinig betrachten
- Funktionenmikroskop (Kirsch 1980) – noch mit Overhead-Folien
  - Graphen einer (geeigneten) Funktion f in der Nähe eines festen Punktes P mit einem ‚Mikroskop' betrachtet
  - Ausschnitt um den Punkt auf dem Graphen von f immer weiter vergrößert (Idee des Hineinzoomens).
  - kleines Graphenstück bei hinreichend starker Vergrößerung praktisch geradlinig

Grundvorstellungen: Lokale Linearität

- Interaktive Versions des Funktionenmikroskop

Werkzeugkompetenzen_5-13_Funktionenlupe

Autor: Hans-Jürgen Elschenbroich



Grundvorstellungen: Lokale Linearität

Zu einer ausgeprägten Grundvorstellung der lokalen Linearität einer Funktion $f\colon x \mapsto y$ gehört insbesondere:

- Beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung eines Punktes des Graphen einer differenzierbaren Funktion sieht man nur ein geradliniges Kurvenstück.
- Für kleine Änderungen der x-Werte ist die Funktion so gut wie linear, kann also approximativ durch einen linearen Zusammenhang ersetzt werden.
  - Dies bedeutet, dass die Funktionswerte in einer bestimmten, ggf. sehr kleinen Umgebung nicht weit weg von den Werten einer linearen Funktion liegen.

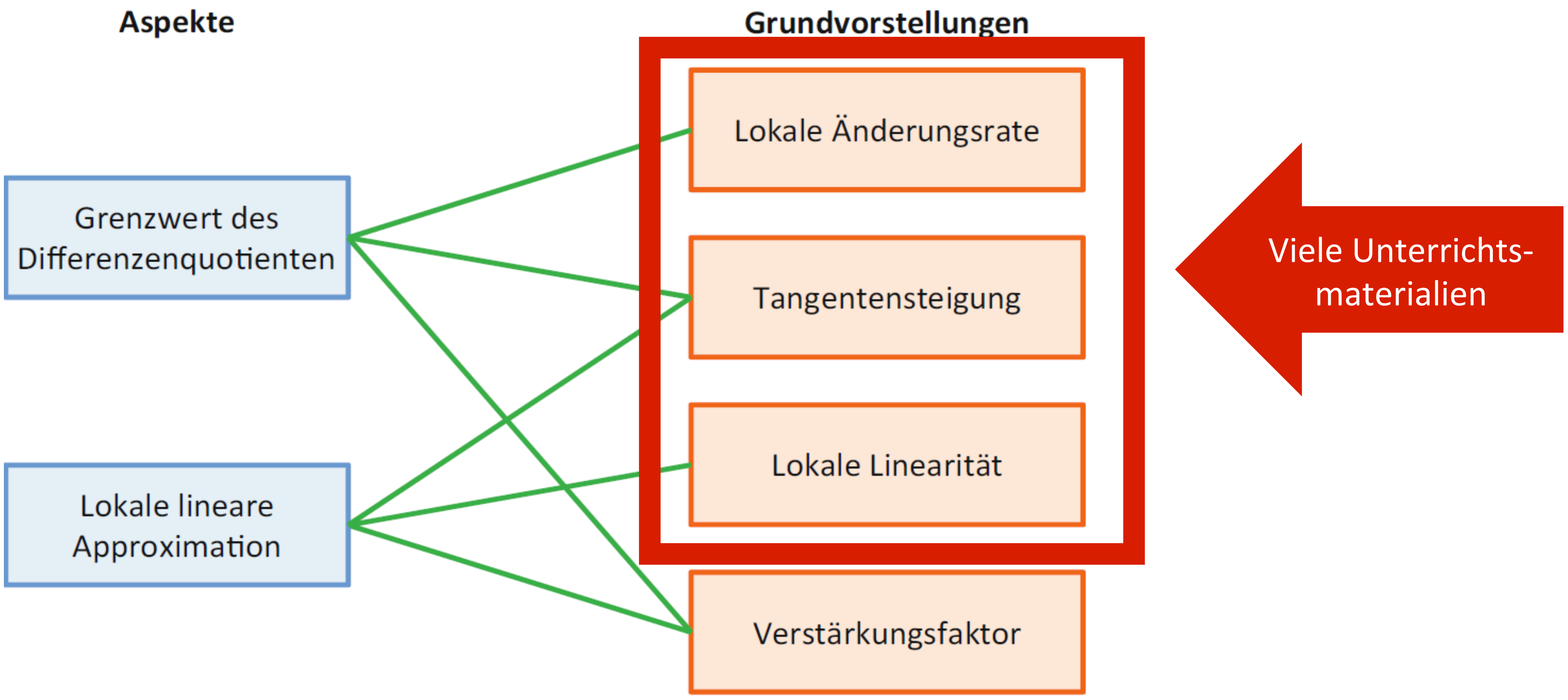
Grundvorstellungen: Ableitung als Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen

- GV … spielt im Mathematikunterricht keine Rolle
- GV … in der Didaktik strittig

Zu einer umfassend ausgeprägten Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors gehören folgende Kenntnisse:

- Die Ableitung gibt an, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken.
- Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle/starke Änderungen der Funktionswerte.
- Für kleine Änderungen ist der Zusammenhang von Δx, Δy multiplikativ: $\Delta y \approx m \cdot \Delta x$.

Beziehungen zwischen Aspekten und Grundvorstellungen



Nächste Stationen im Mathematikunterricht

- Ableitungsfunktion
- Ableitungsregeln

Blick in die mathematische Faktenbox

Mathematische Faktenbox 18: Differenzierbarkeit und Ableitung

2.1.8. Definition (diffenzierbare Funktion). Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* in einem Punkt x_0 im Intervall I, falls

$$\lim_{x \neq x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{oder, was dasselbe ist,} \quad \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{E.13}$$

existiert und endlich ist.
Diesen Grenzwert nennen wir die *Ableitung* der Funktion f an der Stelle (bzw. im Punkt) x_0 und bezeichnen sie mit $f'(x_0)$. Ist f in jedem Punkt $x_0 \in I$ diffenzierbar, dann nennen wir f (global) diffenzierbar auf I. In diesem Fall nennen wir die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ (erste) *Ableitungsfunktion* von f.

Blick in der LP und SRP

Den Begriff der Ableitungsfunktion kennen (Lehrplan)

AN 3 Ableitungsfunktion/Stammfunktion

- AN-R 3.1 Den Begriff *Ableitungsfunktion/Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können
- AN-R 3.2 Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren graphischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können
- AN-R 3.3 Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

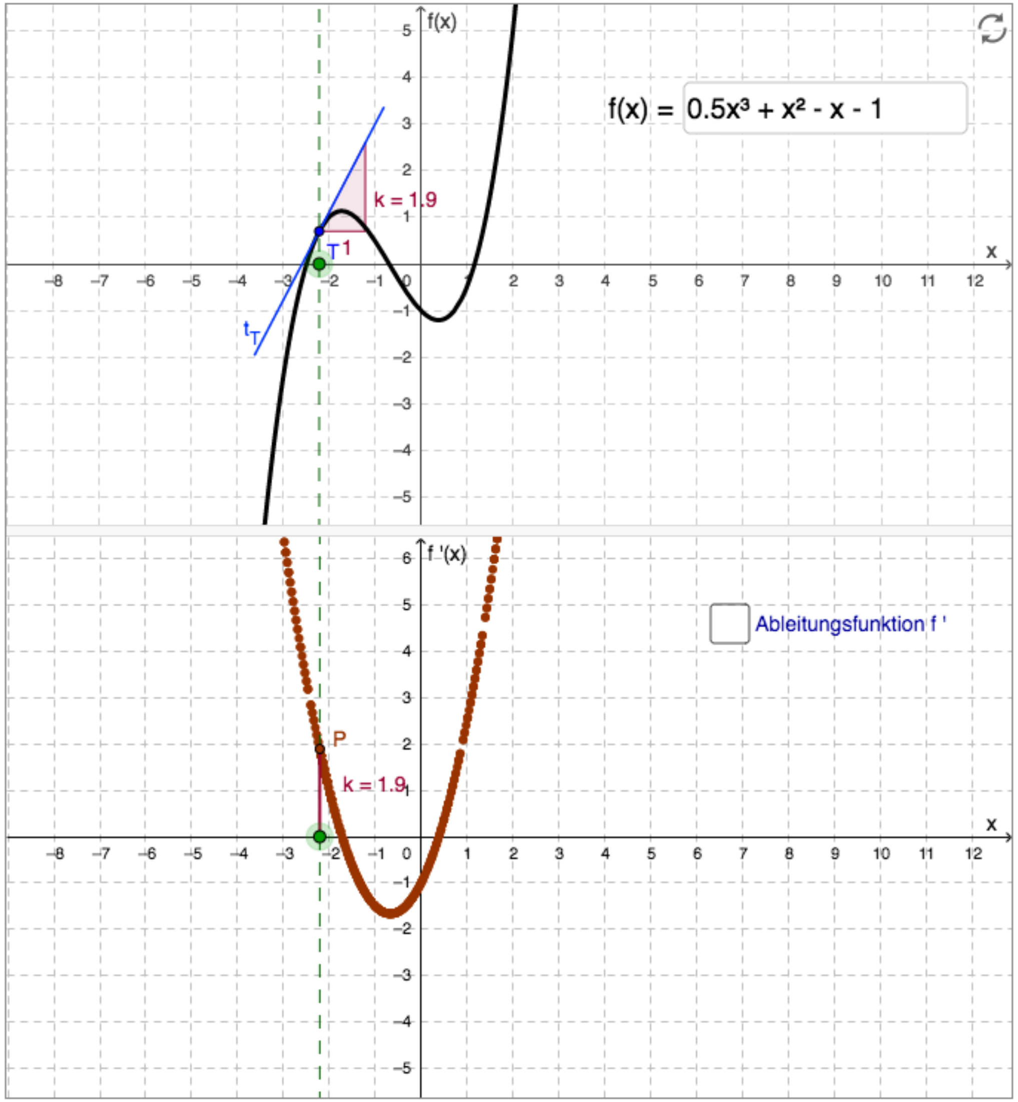
Anmerkungen: Der Begriff der *Ableitung(sfunktion*) soll verständig und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden. Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist das Ableiten von Funktionen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Differentiationsregeln eingeschränkt.

Von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion

Grundvorstellung der Tangentensteigung genutzt

- Vorstellung, dass die Tangente an eine Kurve in einem Punkt die gleiche Steigung hat wie die Kurve
- Grafisches Differenzieren
  - in beliebigen Punkten (x, f(x)) des Graphen einer Funktion wir die jeweilige Steigung k bestimmt und mittels (x,k) der Graph von f‘ erzeugt
  - Unzählige technologische Hilfsmittel – Aufzeichnen der Spur

Von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion



Mathematische Faktenbox 18: Differenzierbarkeit und Ableitung

2.1.8. Definition (diffenzierbare Funktion). Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* in einem Punkt x_0 im Intervall I, falls

$$\lim_{x \neq x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{oder, was dasselbe ist,} \quad \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{E.13}$$

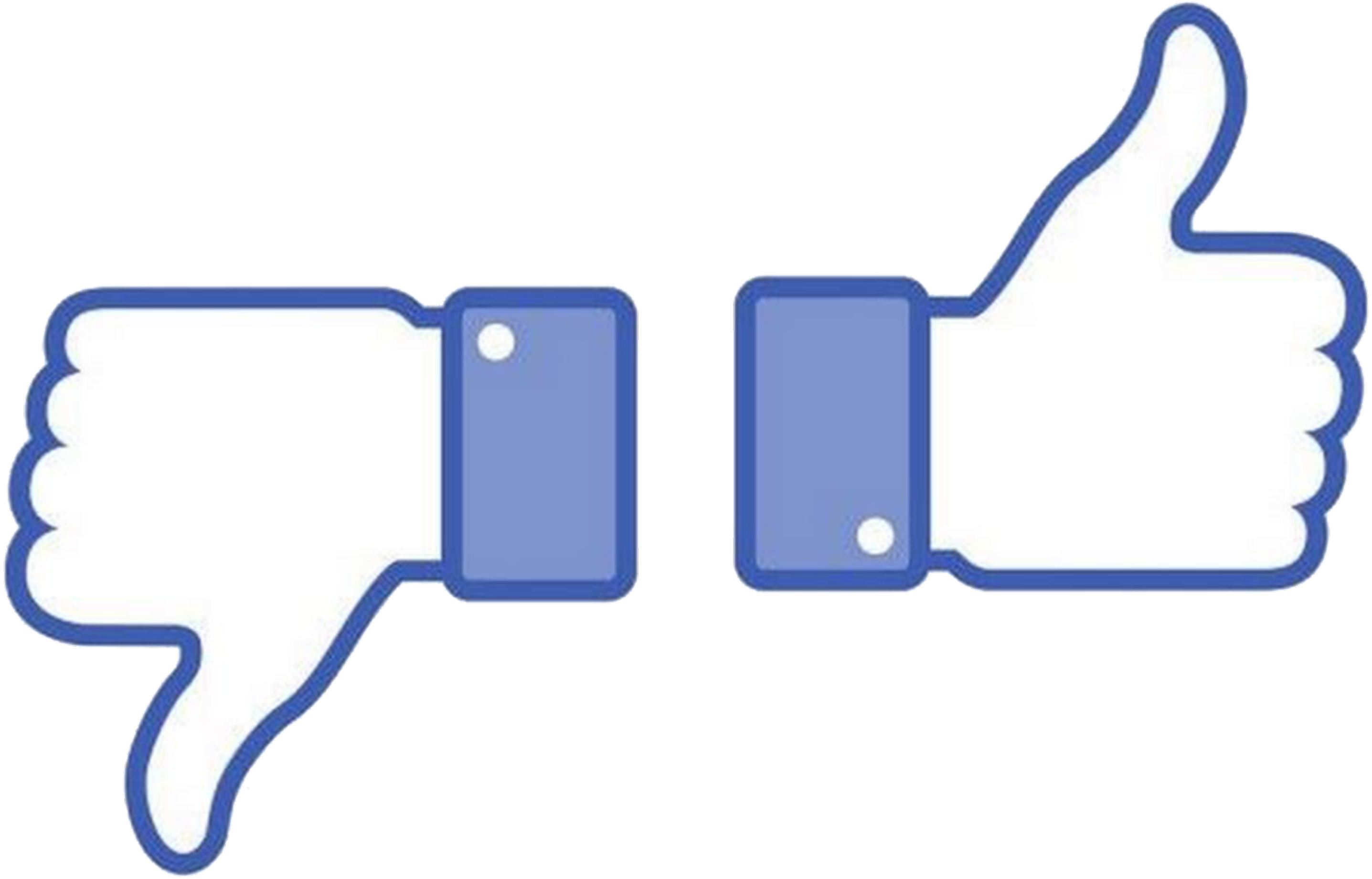
existiert und endlich ist.
Diesen Grenzwert nennen wir die *Ableitung* der Funktion f an der Stelle (bzw. im Punkt) x_0 und bezeichnen sie mit $f'(x_0)$. Ist f in jedem Punkt $x_0 \in I$ diffenzierbar, dann nennen wir f (global) diffenzierbar auf I. In diesem Fall nennen wir die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ (erste) *Ableitungsfunktion* von f.

Achtung: Wechsel von x_0 zu x

Ableitungsregeln im Lehrplan

- Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktionen kennen und anwenden können (7. Klasse, Kompetenzmodul 5, Abschnitt: Grundlagen der Differentialrechnung anhand von Polynomfunktionen)
- Ableitungsregeln für Exponential- und Logarithmusfunktionen, Sinus- und Cosinusfunktion kennen (7. Klasse, Kompetenzmodul 6, Abschnitt: Erweiterung und Exaktifizierung der Differentialrechnung)
- Weitere Ableitungsregeln (insbesondere die Kettenregel) kennen und für Funktionsuntersuchungen in verschiedenen Bereichen verwenden können (7. Klasse, Kompetenzmodul 6, Abschnitt: Erweiterung und Exaktifizierung der Differentialrechnung)

Ableitungsregeln in der Schule beweisen?



Ableitungsregeln beweisen oder nicht?

Unterricht so gestalten, dass sich Beweisbedürftigkeit ergibt!

Möglicher Unterrichtsgang dazu:

- **Erkunden des Phänomens:** Schülerinnen und Schüler lernen vor der Formulierung von Sätzen (Ableitungsregeln) konkrete Beispiele kennen und können an diesen das Phänomen entdecken.
- **Herausarbeiten einer Vermutung:** Ausgehend von den konkreten Beispielen formulieren die Schülerinnen und Schüler eine allgemeine Vermutung.
- **Beweis der Vermutung:** Gegebenenfalls muss für den Beweis/Begründung der Vermutung noch weiteres Vorwissen zur Verfügung gestellt werden.

Ableitungsregeln

- **Erkunden des Phänomens:** Schülerinnen und Schüler lernen vor der Formulierung von Sätzen (Ableitungsregeln) konkrete Beispiele kennen und können an diesen das Phänomen entdecken.
- **Herausarbeiten einer Vermutung:** Ausgehend von den konkreten Beispielen formulieren die Schülerinnen und Schüler eine allgemeine Vermutung.
- **Beweis der Vermutung:** Gegebenenfalls muss für den Beweis/Begründung der Vermutung noch weiteres Vorwissen zur Verfügung gestellt werden.

Für alle Schülerinnen und Schüler

Differenzierende Materialien
&
Didaktische Reduktion

Exemplarischer Unterrichtsgang für $f(x) = x^n$

- **Erkunden des Phänomens:** Schülerinnen und Schüler lernen vor der Formulierung von Sätzen (Ableitungsregeln) konkrete Beispiele kennen und können an diesen das Phänomen entdecken.
- **Herausarbeiten einer Vermutung:** Ausgehend von den konkreten Beispielen formulieren die Schülerinnen und Schüler eine allgemeine Vermutung.
- **Beweis der Vermutung:** Gegebenenfalls muss für den Beweis/Begründung der Vermutung noch weiteres Vorwissen zur Verfügung gestellt werden.

Für alle Schülerinnen und Schüler

Differenzierende Materialien & Didaktische Reduktion

Ableitungsregeln in ihrem Zusammenhang

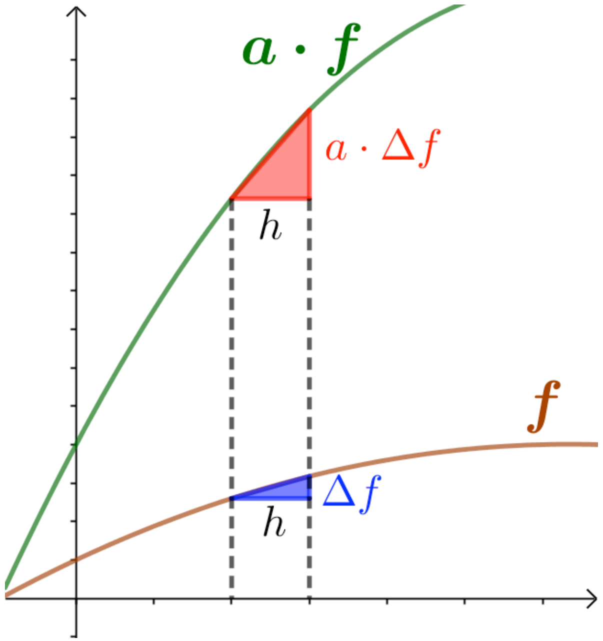
- zuerst die Ableitungsregeln der *Grundfunktionen* $f(x) = x^n$ mit n Element aus IN* und $f(x) = k$ (k konstant) und
- danach dann die Ableitungsregeln der *Grundfunktionen* $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ erarbeitet werden.

Meist folgen diesen Ableitungsregeln dann die Regeln für das Differenzieren *zusammengesetzter* und *verketteter Funktionen*. D.h. in weiterer Folge werden

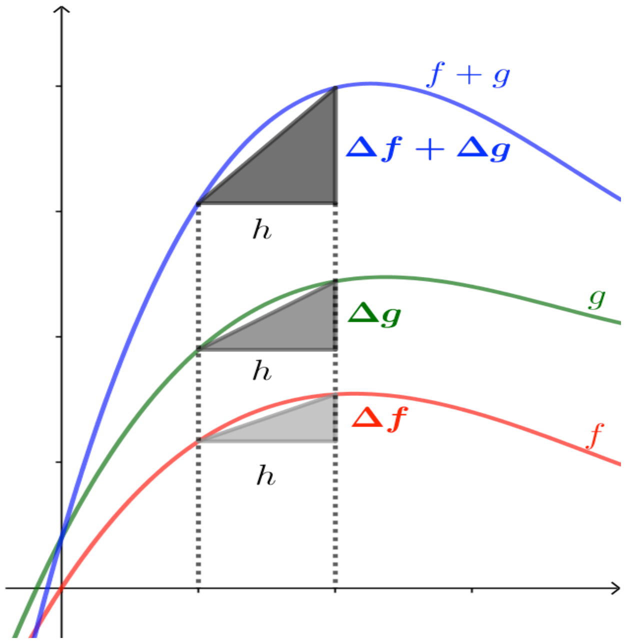
- die Faktor- bzw. Konstantenregel,
- die Summen- bzw. Differenzenregel,
- die Produkt- und Quotientenregel sowie
- die Kettenregel erarbeitet
- Rationale Funkiton, Wurzel- und Exponentialfunktionen

Ableitungsregeln – Beweise/Begründungen variieren

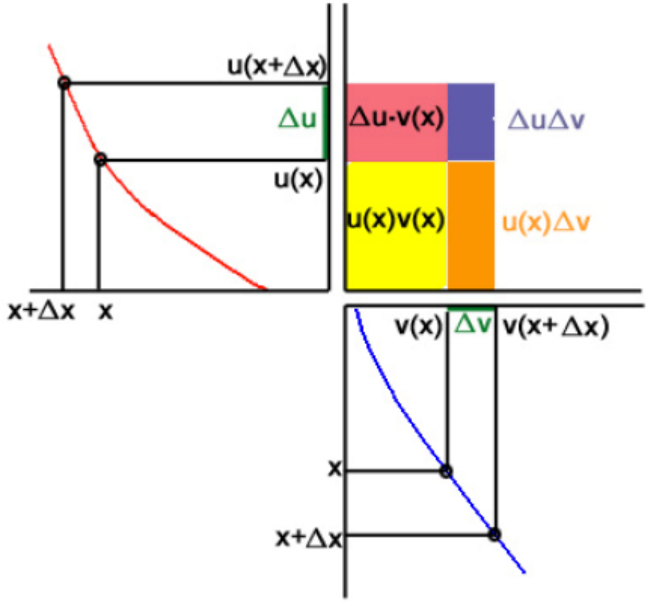
Geometrische Interpretationen anbieten



Faktor-/Konstantenregel



Summenregel



Produktregel

- Kapitel E §5 – Kurvendiskussion

„In der ‚Kurvendiskussion' auf der Schule werden keine Kurven behandelt und diskutiert wird auch nicht. Dieses Thema, so wie es hier verhandelt wird, würde ich lieber einem anständigen Computeralgebra-System überlassen."

„Warum findet die Kurvendiskussion so selten in anwendungsrelevanten Kontexten statt?"

„Mir fehlt der Bezug zu den Anwendungen, und die Kraft heuristischer Denk- und Arbeitsweisen ist bei diesem Thema, so wie es behandelt wird, praktisch nicht erlebbar. Das Bild von Mathematik wird reduziert auf das Arbeiten mit einem leistungsfähigen Kalkül. Von den drei Winterschen Grunderfahrungen, die den allgemeinbildenden Wert des Mathematikunterrichts ausmachen, kommt also nur eine zur Geltung, und diese auch nur reduziert."

(Quelle: Danckwerts & Vogel 2010)

Fachdidaktische Perspektiven zur Kurvendiskussion

- Kurvendiskussion entlang der Idee der Änderung entwickeln

- Monotoniekriterium
  - Lokale Extrema und Wendepunkte vom Monotoniekriterium aus begründen
  - Monotoniekriterium selbst nur anschaulich begründen

- Beziehung von Monotonie und Ableitung

Definition (lokale Extrema)

Sei I ein Intervall und sei f: I → R eine reelle Funktion.

(i) Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt ein **lokales Maximum** von f, falls es eine Umgebung von $U_\varepsilon(x_0) =]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ gibt, sodass für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap I$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$.

(ii) Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt ein **lokales Minimum** von f, falls es eine Umgebung von $U_\varepsilon(x_0) =]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ gibt, sodass für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap I$ gilt $f(x) \geq f(x_0)$.

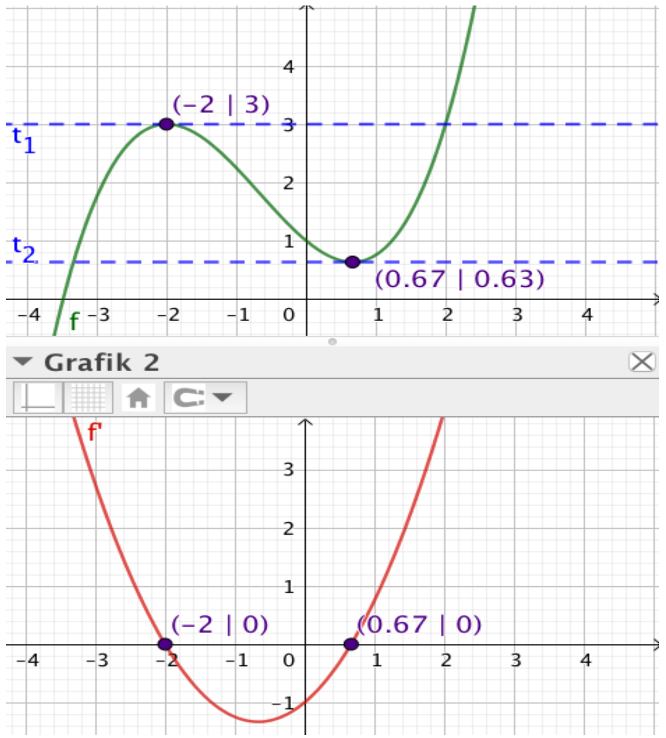
Monotoniekriterium – Extrema und Wendepunkte

Monotoniekriterium:

Eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion mit überall positiver (negativer) Ableitung ist dort streng monoton wachsend (fallend).

Lokale Extrema

notwendige Bedingung: lokale Extrema liegen nur dort, wo die Tangenten waagrecht verlaufen. D.h. also dort, wo die erste Ableitung verschwindet.



Monotoniekriterium – Extrema

Lokale Extrema

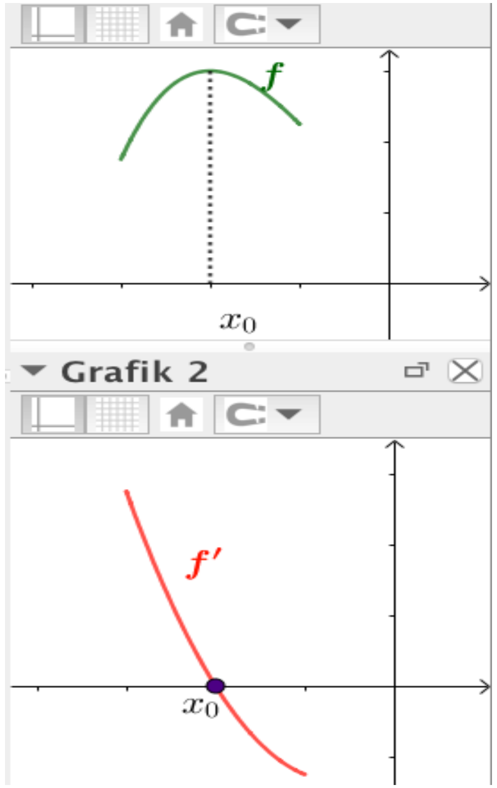
hinreichende Bedingung: ändert sich das Monotonieverhalten des Graphen, dann ist dort ein lokales Extremum.

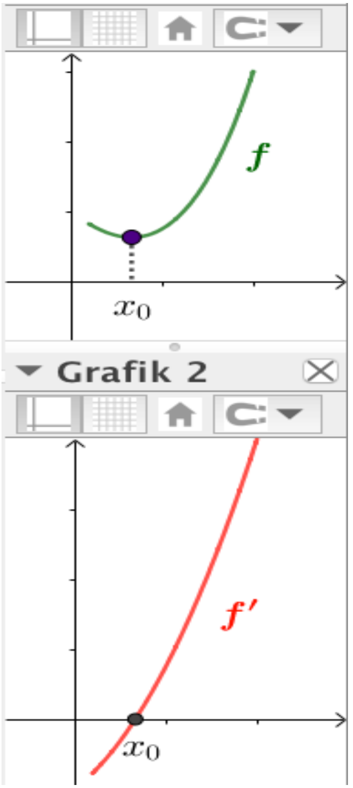
- Wechselt f' bei x_0 das Vorzeichen von – nach + (bzw. von + nach –),
  - so fällt (steigt) f lokal links von x_0 und
  - steigt (fällt) lokal rechts von x_0.

Monotoniekriterium – Extrema

Erstes Kriterium für lokale Extrema

Ist $f'(x_0) = 0$ und wechselt f' bei x_0 das Vorzeichen von – nach + (bzw. von + nach -), so hat f bei x_0 ein lokales Maximum (Minimum).





Schwäche: Bei der Untersuchung von f' kann man sich nicht nur auf die Stelle x_0 beschränken, sondern man muss eine ganze Umgebung von x_0 einbeziehen.

Monotoniekriterium – Extrema

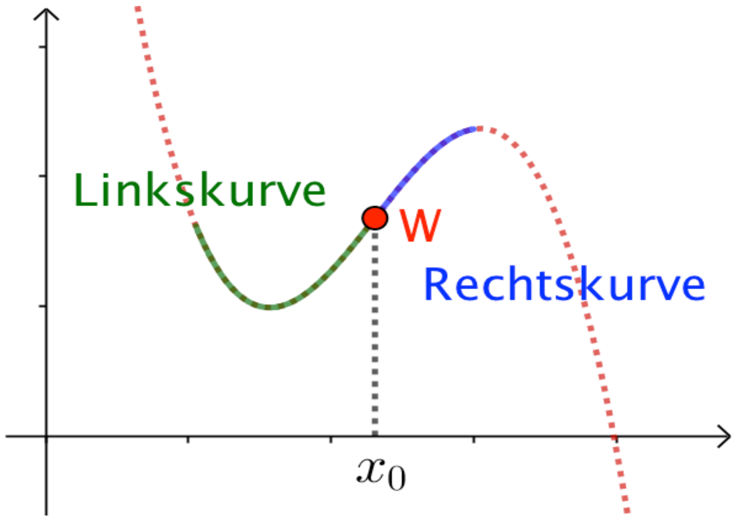
Zweites Kriterium für lokale Extrema

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x) > 0$, so besitzt f bei x_0 ein lokales Minimum. Entsprechend folgt aus $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ die Existenz eine lokalen Maximums.

Nachteil: Minimum f von (x) = x^4 lässt sich damit nicht finden

Monotoniekriterium – Wendepunkte

Am Wendepunkt ändert sich das Krümmungsverhalten.
Steigung nimmt zu/ab → Änderung des Monotonieverhaltens von f‘



Wendepunkt
notwendige Bedingung: Wendepunkte können nur dort liegen, wo die zweite Ableitung verschwindet.

Monotoniekriterium – Wendepunkte

Wendepunkt
notwendige Bedingung: Wendepunkte können nur dort liegen, wo die zweite Ableitung verschwindet.

Erstes Kriterium für Wendepunkte: Ist $f''(x_0)= 0$ und wechselt f'' bei x_0 das Vorzeichen, so hat f bei x_0 einen Wendepunkt.
(Ein Vorzeichenwechsel von f'' impliziert eine Änderung des Montonieverhaltens f‘ − Krümmungsverhalten von f.)

Zweites Kriterium für Wendepunkte: Ist $f''(x_0)=0$ und ist $f'''(x)$ ungleich 0, so hat f bei x_0 einen Wendepunkt.

Fachdidaktische Perspektiven zur Kurvendiskussion

- Kurvendiskussion entlang der Idee der Änderung entwickeln

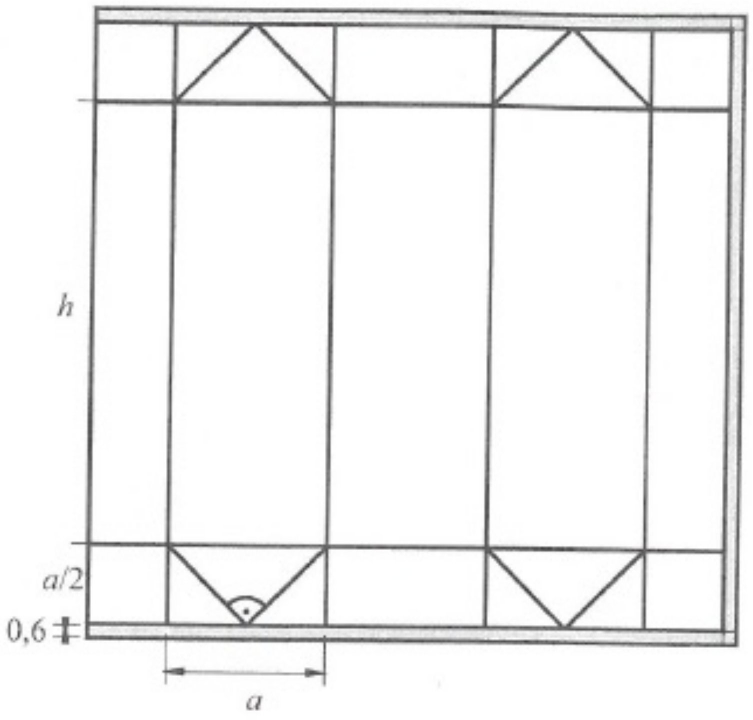
- Monotoniekriterium
  - Lokale Extrema und Wendepunkte vom Monotoniekriterium aus begründen
  - Monotoniekriterium selbst nur anschaulich begründen

- Beziehung von Monotonie und Ableitung

- Neuartige Aufgaben
  - Qualitativ analytische Argumente einbinden
  - Technologie klug einsetzen
  - Anwendungskontexte

Fachdidaktische Perspektiven zur Kurvendiskussion – exemplarische Aufgabenstellung

Im Handel gibt es eine Vielzahl von Tetra Packungen, die 1 Liter eines Getränks fassen. Wird bei der Herstellung dieser Verpackungen auch darauf geachtet, möglichst wenig Verpackungsmaterial zu verbrauchen?



(Quelle: Danckwerts & Vogel 2010)

Fachdidaktische Perspektiven zur Kurvendiskussion – exemplarische Aufgabenstellung – Lösungserwartung

Der Inhalt einer solchen Tetra Packung ist schnell in der Klasse ausgetrunken und dann kann die Verpackung an den Kleberändern aufgemacht und aufgefaltet werden. Dabei ergibt sich für viele Tetra Packungen ein Faltnetz, wie es auf der vorhergehenden Folie zu sehen ist.

Misst man die Bestimmungstücke im Faltnetz, dann haben die Kleberänder eine Stärke von 6 mm, und für die restlichen Maße gilt: $a = 7{,}1$ cm; $h = 19{,}7$ cm.

Rechnerisch führt das zu einem Inhalt von $V = 7{,}1^2 * 19{,}7 = 993$ cm^3

Die gefüllt Packung ist leicht bauchig und enthält tatsächlich 1 Liter. Also 1000 cm^3. Es bleibt sogar noch ein bisschen Platz, dass man das Getränk schütteln kann.

Fachdidaktische Perspektiven zur Kurvendiskussion – exemplarische Aufgabenstellung – Lösungserwartung

Nun stellt sich die Frage, sind a und h tatsächlich optimal gewählt?

- Der Materialverbrauch mit den Abmessungen a und h kann mit der Funktion

$$M(a,h) = (h + a + 1{,}2)(4a + 0{,}6)$$ beschrieben werden.

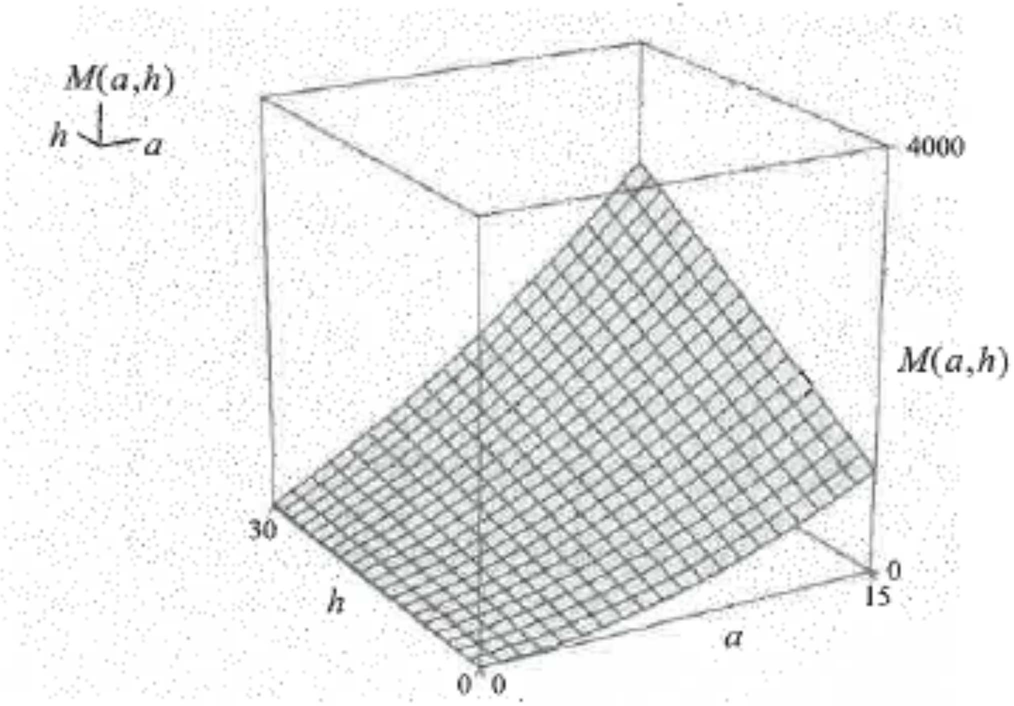
Achtung: Die Frage ist hier nicht, wie kann 1 Liter mit minimalem Material verpackt werden!

Sondern, wie bei der vorgegebenen Form die Abmessungen optimal zu wählen sind.

Den Graphen dieser Funktion kann man schnell mit Technologie zeichnen. Außer für $a = h = 0$ ist das nicht viel zu erkennen. Dieser Graph ist ja auch in seiner Gesamtheit nicht von Interesse.

Fachdidaktische Perspektiven zur Kurvendiskussion – exemplarische Aufgabenstellung – Lösungserwartung

Graph von $M(a,h) = (h + a + 1{,}2)(4a + 0{,}6)$



Graph von $M(a,h)$

(Quelle: Danckwerts & Vogel 2010)

Fachdidaktische Perspektiven zur Kurvendiskussion – exemplarische Aufgabenstellung – Lösungserwartung

Die Situation wird übersichtlicher und mit den in der Schule zur Verfügung stehenden Mitteln bearbeitbar, wenn wir den Zusammenhang der Variablen a und h mit ein beziehen (vgl. Nebenbedingung bei Extremwertaufgaben).

Für diese gilt: $a^2 * h = 1000$.

Umformen ergibt: $h = 1000/a^2$

Wird h in $M(a,h) = (h + a + 1{,}2)(4a + 0{,}6)$ eingesetzt, ergibt das die Funktion

$$M(a) = (1000/a^2 + a + 1{,}2)\ (4a + 0{,}6)$$

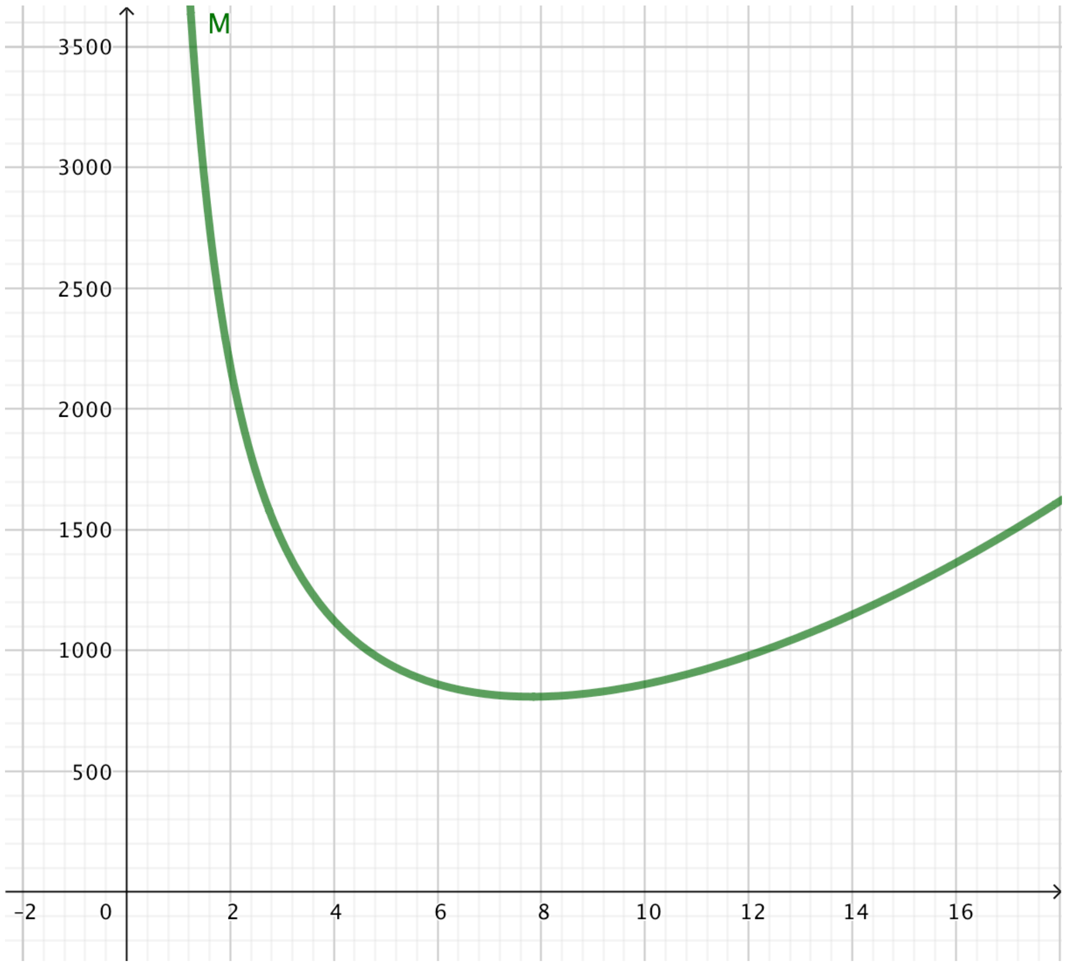
$$M(a) = 4a^2 + 5{,}4a + 0{,}72 + 4000/a + 600/a^2 \qquad (a > 0)$$

Der Graphen der Funktion M(a) ist mit Technologie schnell dargestellt und soll dann zu aller erst einmal **qualitativ** untersucht werden.

Fachdidaktische Perspektiven zur Kurvendiskussion – exemplarische Aufgabenstellung – Lösungserwartung

Die qualitative Untersuchung ergibt:

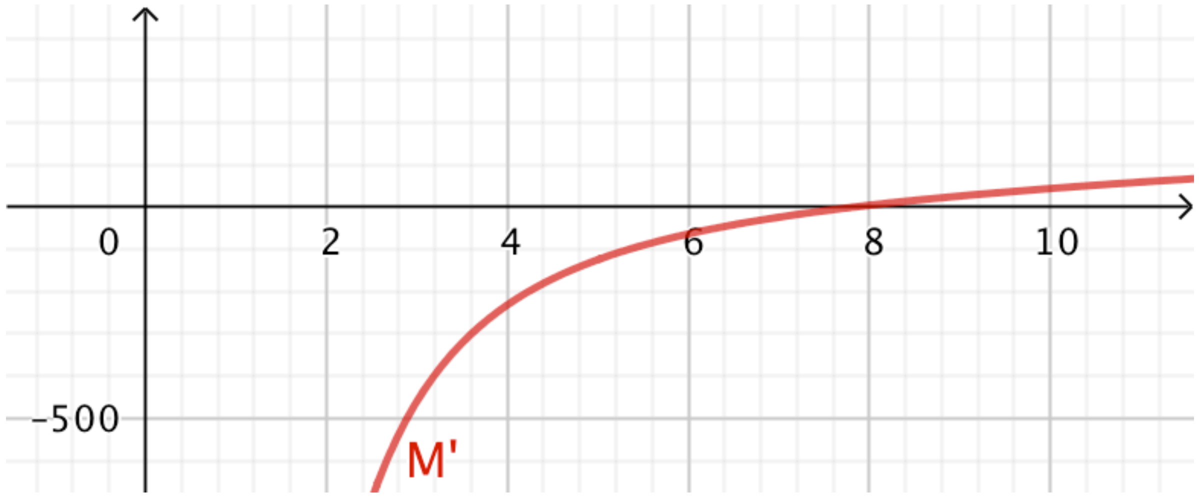
- Für kleine a sind die ersten beiden Summanden in M(a) klein und die letzten beiden Summanden groß.
- Für große a sind die ersten beiden Summanden in M(a) groß und die letzten beiden Summanden klein.
- Es ist daher plausibel, dass das Minimum irgendwo dazwischen liegt.
- Jetzt kann das zuvor schon angesprochene Monotoniekriterium genützt werden.

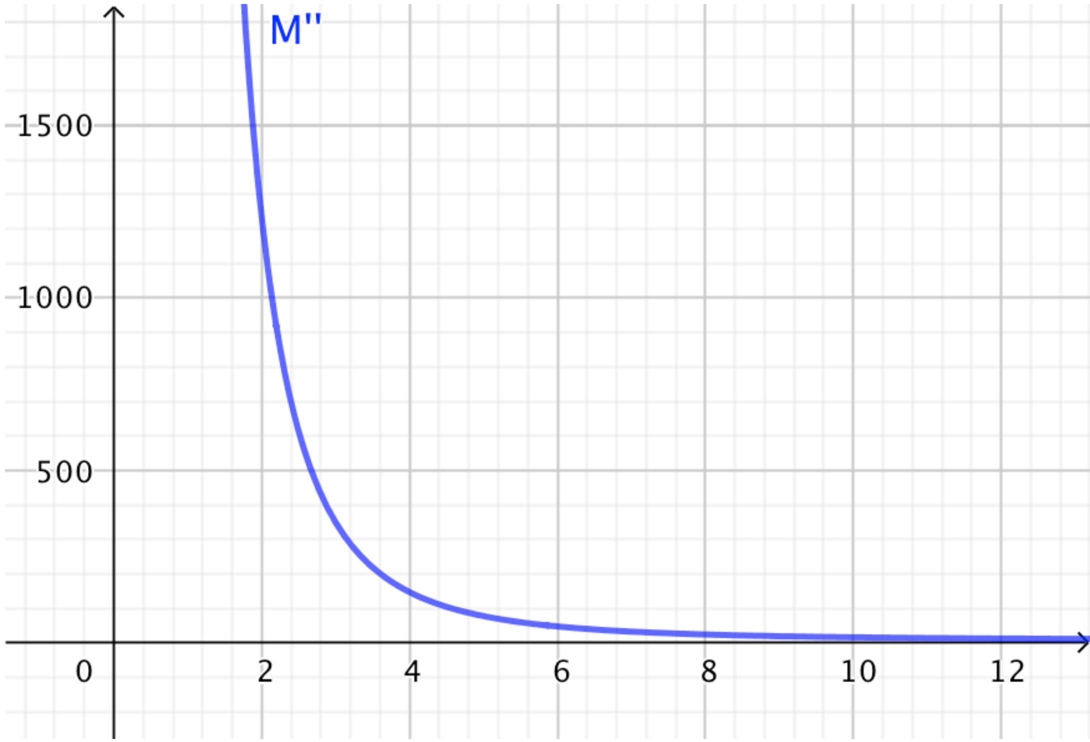


Fachdidaktische Perspektiven zur Kurvendiskussion – exemplarische Aufgabenstellung – Lösungserwartung

Die erste und zweite Ableitung von M

- $M'(a) = 8a + 5{,}4 - 4000/a^2 - 1200/a^3$
- $M''(a) = 8 + 8000/a^3 + 3600/a^4$





Fachdidaktische Perspektiven zur Kurvendiskussion – exemplarische Aufgabenstellung – Lösungserwartung

- Offensichtlich ist M'' wegen a > 0 im ganzen Definitionsbereich positiv und somit ist M' im ganzen Definitionsbereich monoton wachsend.

Qualitatives Argument

- Daraus kann man ablesen: M ist links von der Nullstelle von M' monoton fallend und rechts von der Nullstelle von M' monoton steigend. Das sichert aber noch nicht die Nullstelle vom M'!

Qualitatives Argument

- Diese Nullstelle von M' kann man ablesen oder numerisch ermitteln → a = 7,8.
- D.h. bei a = 7,8 sind die Abmessung der Verpackung optimal.

- Nun weicht aber a = 7,8 deutlich von unserer Messung a = 7,1 ab.
- Abweichungen von der Messung können abschließend ermittelt und diskutiert werden.

Fachdidaktische Perspektiven zur Kurvendiskussion – exemplarische Aufgabenstellung – Lösungserwartung

Warum im gesamten Verlauf dieser Aufgabe qualitative Betrachtungen der Graphen angebracht sind:

- Weg vom Kalkül − hin zu visuellen Ergebnissen
- Visuelle Ergebnisse mit qualitativen analytischen Argumenten stützen
- Monotoniebetrachtung zur analytischen Fundierung der qualitativen Argumente

- Anstelle des schematischen Kurvendiskussionsschemas mit qualitativen Argumenten die relevanten Eigenschaften herausarbeiten.
- Balance zwischen empirisch-numerisch (numerisch-grafisches Vorgehen) und theoretischen Überlegungen sinnvoll.

Kapitel F §1 – Integralrechnung in Lehrplänen und bei der SRDP

Integralrechnung in den Lehrplänen und der SRDP

Lehrplan AHS – 8. Klasse

Grundlagen der Integralrechnung

- Das bestimmte Integral kennen und als Zahl „zwischen" allen Ober- und Untersummen auffassen können sowie näherungsweise als Summe von Produkten auffassen und berechnen können:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_i f(x_i) \cdot \text{Ä}x$$

- Größen durch Integrale ausdrücken können, insbesondere als Verallgemeinerungen von Formeln mit Produkten (zB für Flächeninhalte oder zurückgelegte Wege)
- Den Begriff Stammfunktion kennen und anwenden können
- Bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln berechnen können

Integralrechnung in den Lehrplänen und der SRDP

Lehrplan AHS – 8. Klasse

Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung

- Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, Weglängen, Geschwindigkeiten, Arbeit und Energie; allenfalls weitere physikalische Deutungen)
- Die Hauptsätze (bzw. den Hauptsatz) der Differential- und Integralrechnung kennen; den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren erläutern können
- Das unbestimmte Integral kennen

Integralrechnung in den Lehrplänen und der SRDP

Lehrplan HAK – 8. Semester

Bereich Analysis – Stammfunktionen

- den Begriff der Stammfunktion sowie den Zusammenhang zwischen Funktion, Stammfunktion und ihrer grafischen Darstellung beschreiben,
- den Begriff des unbestimmten Integrals und den Zusammenhang mit der Stammfunktion beschreiben,
- Stammfunktionen von Potenz- und Polynomfunktionen sowie der Funktionen f mit f(x)=1/x und g mit g(x)=a*e^(k*x) mit Hilfe der notwendigen Integrationsregeln berechnen.

Bereich Analysis – Integral und Integralrechnung

- den Begriff des bestimmten Integrals auf Grundlage des intuitiven Grenzwertbegriffes erläutern, diesen als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben,
- das bestimmte Integral als orientierten Flächeninhalt deuten und damit Berechnungen durchführen,
- die Integralrechnung auf wirtschaftliche Anwendungen, insbesondere auf Stammfunktionen von Grenzfunktionen und kontinuierliche Zahlungsströme anwenden, Berechnungen durchführen sowie die Ergebnisse interpretieren und damit argumentieren.

Integralrechnung in den Lehrplänen und der SRDP

z.B. Lehrplan HTL für Elektrotechnik und technische Informatik – 6. Semester

Bereich Integralrechnung

- Stammfunktionen von grundlegenden und im Fachgebiet relevanten Funktionen ermitteln, das bestimmte Integral berechnen und als orientierten Flächeninhalt interpretieren;
- die Differential- und Integralrechnung zur Lösung von Aufgaben des Fachgebietes einsetzen;
- Methoden der numerischen Mathematik mit unterstützenden technischen Hilfsmitteln zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstellen von Funktionen und zur näherungsweisen Berechnung von bestimmten Integralen einsetzen.

Lehrstoff:

Integralrechnung:

Stammfunktion und bestimmtes Integral, Grundintegrale, Integrationsregeln und -methoden;

Numerische Verfahren:

Iterationsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen; Numerische Integration.

Integralrechnung in den Lehrplänen und der SRDP

Grundkompetenzen SRP

AN 3	**Ableitungsfunktion/Stammfunktion**
AN-R 3.1	Den Begriff *Ableitungsfunktion/Stammfunktion* kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können
AN-R 3.2	Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren graphischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können
AN-R 3.3	Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen
Anmerkungen:	Der Begriff der *Ableitung(sfunktion)* soll verständig und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden. Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist das Ableiten von Funktionen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Differentiationsregeln eingeschränkt.
AN-L 3.4	Zielfunktionen in einer Variablen für Optimierungsaufgaben (Extremwertaufgaben) aufstellen und globale Extremstellen ermitteln können

Integralrechnung in den Lehrplänen und der SRDP

Grundkompetenzen SRP

AN 4	**Summation und Integral**
AN-R 4.1	Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können
AN-R 4.2	Einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $\int k \cdot f(x)\,dx$ und $\int f(k \cdot x)\,dx$ (vgl. Inhaltsbereich *Funktionale Abhängigkeiten*) bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können
AN-R 4.3	Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können
Anmerkungen:	Analog zum Differentialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral auf der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem auf der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext. Durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel ist auch die Berechnung von bestimmten Integralen nicht durch die in den Grundkompetenzen angeführten Integrationsregeln eingeschränkt.

Integralrechnung in den Lehrplänen und der SRDP

Grundkompetenzen SRDP – gemeinsamer Teil aller BHS

4.5	den Zusammenhang zwischen Funktion und ihrer Ableitungsfunktion bzw. einer Stammfunktion interpretieren und erklären; bei gegebenem Graphen einer Funktion den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion skizzieren **siehe Kommentar**
4.6	Regeln zum Berechnen von Stammfunktionen von Potenz- und Polynomfunktionen verstehen und anwenden
4.7	das bestimmte Integral auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes als Grenzwert einer Produktsumme interpretieren und damit argumentieren
4.8	das bestimmte Integral als orientierten Flächeninhalt verstehen und anwenden

Kommentar 4.2: Vorausgesetzt wird die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Hier geht es nicht um das Bestimmen der Grenzwerte von Differenzenquotienten.