Blatt 9: Das „Unendliche“// Differentialrechnung Teil 1

39 **Achill und die Schildkröte.** Die Bewegungsparadoxien des Zenon von Elea decken die Problematik von unendlich oft wiederholten Handlungen (hier Zurücklegen einer bestimmten Teilstrecke) auf, falls sie nur mit dem Begriff des potentiell, nicht aber mit dem des aktual Unendlichen analysiert werden.

> Achilleus[3] verfolgt eine Schildkröte, die allerdings einen Vorsprung von, sagen wir 100m hat. Bevor Achill die Schildkröte einholen kann, muss er erst ihren Startpunkt erreichen. In der Zeit, die er dafür benötigt, legt die Schildkröte aber auch wieder einen Weg zurück, sagen wir 1/10 des ursprünglichen Vorsprungs von 100m. Um die Schildkröte zu erreichen, muss Achill (mindestens) diesen neuen Standpunkt der Schildkröte (der bei 110m gelegen ist) erreichen. Dieses Spiel wiederholt sich nun: Jedes Mal, wenn Achill den früheren Standpunkt der Schildkröte erreicht, hat diese wieder ein Stück Weg zurückgelegt und so kann Achill die Schildkröte niemals ereichen.

Klären Sie die Situation, d.h. die Frage, ob und wo Achill die Schildkröte einholt auf zwei Arten:

(a) Mittels „physikalischer“ Argumentation: Benutzen Die dazu die Beschreibung des Wettlaufs mittels zweier gleichförmiger Bewegungen. (Achill legt bis zum Zeitpunkt $t \geq 0$ den Weg $a(t) = v\,t$ zurück, wobei v seine (konstante) Laufgeschwindigkeit ist. Die Schildkröte den Weg $s(t) = (v/10)\,t$, da Achill 10 mal so schnell läuft wie sie.)

(b) Mittels mathematischer Argumentation: Berechnen Sie dazu die von Achill bis zum Einholen der Schildkröte zurückgelegte Strecke unter Verwendung einer unendlichen Reihe.

Diskutieren Sie diese beiden Lösungen im Kontext der Begriffe des potentiell und des aktual Unendlichen.

40 **Fragen und Antworten.** Kehren Sie zu den Forenbeiträgen in D 2.6.1 zurück:

> *A:* Ich habe mal ne kleine und bescheidene frage:
>
> also in einem anderen forum wurde behauptet das 0,9(periode) das selbe wie 1 ist und das ein wert unendlich stark angenährt an 0 auch null sei. Da ist meine frage, stimmt das und wenn ja warum, weil mir der gedanke doch ein bisschen befremdend vorkommt, da man periodische zahlen ja auch als bruch schreiben kann.
>
> *B:* Also ich hab genau das Gleiche mal hier im Forum gelesen und da wurde sogar behauptet, dass es nen mathematischen Beweis dafür gibt. [...]
>
> *C:* $0,\bar{9}$ ist identisch zu 1.
> Beweis: $1 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 0,\bar{3} + 0,\bar{3} + 0,\bar{3} = 0,\bar{9}$.

und bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenstellungen *unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Diskussion* in D §2.6 in der Vorlesung:

[3] In der griechischen Mythologie ist Achilleus der stärkste der griechischen Krieger im trojanischen Krieg. Die Ilias des Homer beginnt mit dem Vers „Singe den Zorn, o Göttin, des Peleiaden Achill“. Man kann somit behaupten, dass der Zorn die älteste überlieferte Emotion des Abndlandes ist...

(a) Formulieren Sie in möglichst klarer Sprache, was die jeweiligen Poster fragen bzw. behaupten.
(b) Klären Sie die jeweilige Situation fachlich.
(c) Verfassen Sie jeweils Antwortpostings in denen Sie A, B und C die Situation erklären.

$\boxed{41}$ **Monotoniekriterium.** Arbeiten Sie die das Gegenbeispiels aus D.3.1.8. aus, d.h. argumentieren Sie, dass $f: \ I := [1,2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2-x^2}$ das Monotoniekriterium verletzt.

$\boxed{42}$ **Pegelstand.** Starke Regenfälle haben Auswirkungen auf den Pegelstand eines Flusses. Die Funktion P mit $P(t) = \frac{1}{108}(t^3 - 18t^2 + 81t + 108)$ beschreibt den Zusammenhang zwischen der Zeit und der Höhe des Pegelstandes. Dabei wir die Höhe des Pegelstandes in m und die Zeit t in Stunden gemessen.
(a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
(b) Untersuchen Sie die Veränderungen des Pegelstandes Zeitabschnitten $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[4,6]$, $[6,8]$.
(c) Untersuchen Sie die Veränderungen des Pegelstandes in den Abschnitten $[0,3]$, $[2,7]$ und $[0,1]$, $[3,5]$.
(d) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[4,6]$, $[6,8]$. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Kontext.
(e) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0,3]$, $[2,7]$ und $[0,1]$, $[3,5]$. Interpretieren Sie die Ergebnisse im Kontext.
(f) Berechnen Sie näherungsweise die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 3$ und $t = 5$. Nehmen Sie eine Annäherung von links und rechts vor.

$\boxed{43}$ **Differenzenquotient kontextbezogen.** Lösen Sie die Aufgabe und begründen Sie Ihre Wahl!

Im Rahmen eines Abfahrttrainings für den Teamwettbewerb wird besonderes Augenmerk auf einen Rennabschnitt gelegt, der rund 30 m lang ist. Am Beginn dieses Abschnitts, am Ende und an drei Zwischenpositionen werden Lichtschranken positioniert, um die jeweiligen Zwischenzeiten stoppen zu können. Der am Beginn des Rennabschnitts positionierte Lichtschranken wird mit L_0 bezeichnet. Es folgen der Reihe nach L_1, L_2, L_3 und L_4, wobei sich L_4 am Ende des Rennabschnitts befindet, also $\overline{L_0 L_4} = 30\,\text{m}$ (gemessen längs der Rennstrecke). $s(i)$, $0 \le i \le 4$, gibt die jeweilige Entfernung des Lichtschrankens mit der Nummer i vom Startpunkt der Rennstrecke an. $t(i)$, $0 \le i \le 4$, gibt die jeweilige Zwischenzeit an, die beim Durchfahren des Lichtschrankens mit der Nummer i ausgelöst wird. Aufgrund der Beschaffenheit des Rennabschnitts kann davon ausgegangen werden, dass die Geschwindigkeit während der Fahrt in diesem Abschnitt streng monoton abnimmt.

Aufgabenstellung:
Kreuze die zutreffenden Aussagen an.

(1)	$\frac{s(2)-s(0)}{t(2)-t(0)}$ liefert einen besseren Näherungswert für die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(0)$ als $\frac{s(1)-s(0)}{t(1)-t(0)}$.	☐
(2)	Das arithmetische Mittel der vier Quotienten $\frac{s(1)-s(0)}{t(1)-t(0)}, \ldots, \frac{s(4)-s(0)}{t(4)-t(0)}$ liefert angesichts der vorliegenden Daten den bestmöglichen Näherungswert für die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(0)$.	☐
(3)	Als bestmöglicher Näherungswert für die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(4)$ ist der Quotient $\frac{s(4)-s(3)}{t(4)-t(3)}$ anzusehen.	☐
(4)	Um einen genaueren Näherungswert für die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(0)$ ermitteln zu können, empfiehlt sich die Platzierung einer weiteren Lichtschranken zwischen L_0 und L_1.	☐
(5)	Je näher L_3 bei L_4 liegt, desto genauer kann die Geschwindigkeit eines Rennläufers zum Zeitpunkt $t(4)$ ermittelt werden.	☐

Abbildung 1: Quelle: Mayer, Süss-Stepancik, Huber - Dimensionen 7 Schularbeitentrainer