Blatt 10: Differentialrechnung, Teil 2

$\boxed{44}$ **Differenzierbarkeit & Ableitung 1.** Sind die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Warum bzw. warum nicht?
Zeichnen Sie (mit Technologie!) den Funktionsgraphen und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung (ohne Technologie!).

(a) $f_1(x) = 3x^4 + 5x^3 - x^2 + 7x - 11$

(b) $f_2(x) = x^4 \exp(x)$

(c) $f_3(x) = \exp(x)\, \sin(x)$

(d) $f_4(x) = \dfrac{\cos(x)}{1 + x^2}$

$\boxed{45}$ **Tangente explizit.** Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f in dem jeweils angegebenen Punkt P. Fertigen Sie eine Skizze an.
(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $P = (1, 1)$ (b) $f(x) = e^x$, $P = (0, 1)$ (c) $f(x) = \sin(x)$, $P = (0, 0)$

$\boxed{46}$ **Näherungsweise Berechnungen mittels Ableitung.** Geben Sie unter Verwendung der Ableitung der Wurzelfunktion eine Näherung für $\sqrt{8.92}$ an. Wie gut ist diese Näherung?

$\boxed{47}$ **Knicke und Sprünge.**

(a) Betrachten Sie die sog. Knick-Funktion

$$x_+ := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen. In welchen Punkten ist x_+ stetig, in welchen differenzierbar? Begründen Sie.

(b) Betrachten Sie die (sog. Heaviside'sche) Sprungfunktion

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen, dann verifizieren & begründen Sie die folgenden Aussagen:

(i) H ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $H'(x) = 0$ und daher dort auch stetig.
(ii) H' ist stetig ergänzbar nach $x = 0$.
(iii) Trotzdem ist H in $x = 0$ nicht differenzierbar, weil dort sogar unstetig.
(iv) Die nicht-Differenzierbarkeit von H in $x = 0$ äußerst sich auch dadurch, dass der Differenzenquotient dort keinen Limes hat.

$\boxed{48}$ **Differenzierbarkeit & Ableitung 2.** Für welche reellen x sind die folgenden Funktionen definiert, wo sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht?
Zeichnen Sie (mit Technologie!) den Funktionsgraphen und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung (ohne Technologie!).

(a) $f_1(x) = x^{-3} + \dfrac{x-1}{x-2}$ (c) $f_3(x) = x\log(x) - x$ (e) $f_5(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x+2}$ (d) $f_4(x) = e^{2x+3}$ (f) $f_6(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$

$\boxed{49}$ **Die Tangente als „beste” Gerade — warum $\frac{r(h)}{h} \to 0$?** Ziel dieser Aufgabe ist es (noch einmal und explizit) zu sehen, in welchem präzisen Sinne die Tangente die bestapproximierende Gerade an eine differenzierbare Funktion ist und was das mit der

$$\text{„verschärften Bedingung“} \quad \frac{r(h)}{h} \to 0 \text{ aus D§2.2 zu tun hat.}$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen bzw. bearbeiten Sie nacheinander die folgenden Punkte:

(a) Jede Gerade g durch $(x_0, f(x_0))$ ist von der Form $g(x) = f(x_0) + k(x - x_0)$.

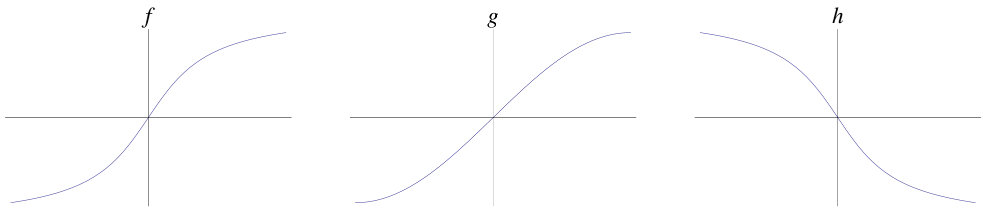
(b) Geben Sie den Fehler
$$r(h) = f(x_0 + h) - g(x_0 + h)$$
der Approximation von f durch die Gerade g explizit in Termen von f und k an.

(c) Es gilt $r(h) \to 0$ für $h \to 0$.
Anmerkung. Der Witz ist hier, dass die Aussagen für *jede* Gerade g durch $(x_0, f(x_0))$ gilt! Außerdem bleibt die Aussage richtig, falls f nur stetig in x_0 ist.

(d) Es gilt
$$\frac{r(h)}{h} \to 0 \ (h \to 0) \text{ genau dann, wenn } g \text{ die Tangente an } f \text{ in } x_0 \text{ ist,}$$
d.h. falls $k = f'(x_0)$ ist.

(e) Fertigen Sie eine Skizze an.

$\boxed{50}$ **Ableitungspuzzle 1.** Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g und h.



Welche der Funktionen i, j, k (Graphen siehe unten) ist die Ableitung von f, g bzw. h? Begründen Sie Ihre Auswahl!