Ausarbeitung

Prüfung zu
Schulmathematik Analysis
WS 2018/19, R. Steinbauer, E. Süss-Stepancik
1. Termin, 31.1.2019
GRUPPEN $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$[1]

1 Faktenwissen zur Schulmathematik Analysis

Kreuzen Sie für jede Antwortmöglichkeit an, ob Sie sie für richtig (R) oder falsch (F) bzw. zutreffend halten. (Je 1 Punkt pro richtiger Antwort)

1.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sicher) unstetig, wenn

(a) ihr Graph einen Sprung hat. (R) (F)
(b) ihr Graph einen Knick hat. (R) (F)

1.2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sicher) nicht differenzierbar, wenn

(a) ihr Graph einen Sprung hat. (R) (F)
(b) ihr Graph einen Knick hat. (R) (F)

1.3. Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist

(a) eine Facette des Begriffs, mit dem dieser fachlich beschrieben wird. (R) (F)
(b) eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt. (R) (F)

1.4. Eine korrekte Schreibweise für eine Funktion f von der Menge A in die Menge B ist

(a) $f : A \to B,\ a \mapsto f(a)$ (R) (F)
(b) $f : A \mapsto B,\ a \to f(a)$ (R) (F)

1.5. Eine korrekte Schreibweise für den Sachverhalt, dass eine Folge (x_n) gegen den Grenzwert x konvergiert ist

(a) $\lim_{n\to\infty} x_n \to x$ (R) (F)
(b) $x_n \to x\ (n \to \infty)$ (R) (F)

1.6. Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende (reelle) Folge hat einen Grenzwert. (R) (F)

[1]Diese Ausarbeitung folgt der Nummerierung der Gruppe A. Bei Gruppe B sind die Aufgaben permutiert.

1.7. Für eine (reelle) Folge gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ falls, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad |x_n - a| < \varepsilon$ (R) (F)

1.8. Die Folge $\langle 2, 4, 6, 8, 10, \dots \rangle$ ist eine Folge. (1) arithmetische (2) geometrische

1.9. Wenn eine (reelle) Folge nicht konvergiert, dann ist sie unbeschränkt. (R) (F)

1.10. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen der Wert $c \in \mathbb{R}$, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \quad \forall x \geq \delta \implies |f(x) - c| < \varepsilon.$ (R) (F)

1.11. Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, \infty))$ ist differenzierbar auf $(0, \infty)$ (R) (F)

1.12. Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar. (R) (F)

1.13. Rationale Funktionen sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich differenzierbar. (R) (F)

1.14. Eine streng monoton wachsende differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat überall eine positive Ableitung. (R) (F)

1.15. Für jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. (R) (F)

$\boxed{2.1}$ (a) $x_1 = \frac{1}{2}x_0 + 1 = 3/2, \; x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 1 = 7/4, \; x_3 = \frac{1}{2}x_2 + 1 = 15/8$

(b) Der Einfachheit in allg. Notation: $r = 1/2, \; d = 1$

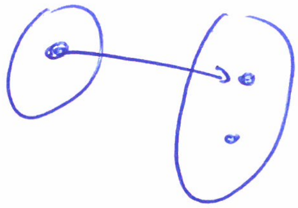
$$x_1 = \frac{1}{2}x_0 + 1 = r x_0 + d$$
$$x_2 = r x_1 + d = r^2 x_0 + d(1 + r)$$
$$x_3 = r x_2 + d = r^3 x_0 + d(1 + r + r^2)$$
$$x_4 = r x_3 + d = r^4 x_0 + d(1 + r + r^2 + r^3)$$
$$\vdots$$
$$\underline{x_n} = r^n x_0 + d \sum_{k=0}^{n-1} r^k = r^n x_0 + d\,\frac{1 - r^n}{1 - r} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n (1 - 2) + 2$$
$$= \underline{\underline{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}}$$

endl. geo. Reihe
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

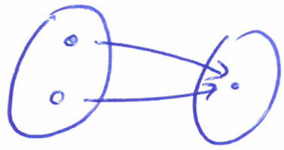
$$\underline{\underline{x_{10}}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 2 - \frac{1}{1024} = \underline{\underline{\frac{2047}{1024}}}$$

2.1 (c) $\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} x_n}} = \lim_n \left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2 - \underbrace{\lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{=0} = \underline{\underline{2}}$

2.2 inj, nicht surj

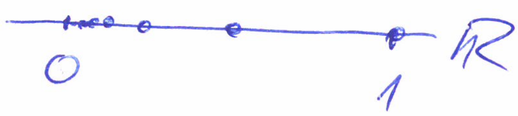


surj, nicht inj



2.3 Reelle Folgen können

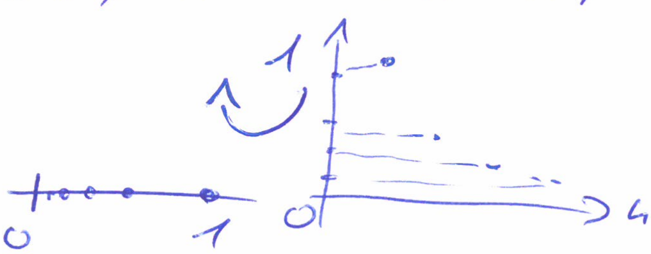
(1) so wie jede andere Folge auch durch ihr Bild $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{R}$ dargestellt werden. Damit assoziiert ist das Bild eines Spaziergangs in $\mathbb{R}^n$; z.B. $x_n = 1/n$



(2) durch ihren Graphen $\{(n, x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathbb{R}^2$ („im Koordinatensystem") dargestellt werden.

z.B. $x_n = 1/n$

Die Darstellung (1) erhält man aus (2), indem man den Graphen auf die y-Achse projiziert und ihn dann dreht.



3.1 Grundvorstellung 2 – Änderungsverhalten/Kovariation bzw. Kovariationsvorstellung

Diese Grundvorstellung wird in der Literatur wie folgt beschrieben:

> *„Mit Funktionen wird erfasst, wie sich Änderungen einer Größe auf eine zweite Größe auswirken bzw. wie die zweite Größe durch die erste beeinflusst wird.“* (Greefrath et al., 2016)

Es geht als um das „Miteinander-Variieren“ der beiden Größen. Beispielsweise nimmt der Umfang eines Kreises mit wachsendem Radius zu, die Funktion ist also monoton wachsend. Umgekehrt verhält es sich etwa beim Abkühlen des Tees.
Aus der
(1) **Perspektive der Definitionsmenge:** Variiert wird a ∈ A. Wie verhält sich dann die "abhängige Variable“ b = f(a)?
(2) **Perspektive der Zielmenge:** Betrachtet wird die die "abhängige Variable“ b = f(a). Wie muss sich a ∈ A verändern, dass sich b = f(a) in einer bestimmten Weise verhält, z. B. einen bestimmten Wert erreicht, oder einen oder Extremwert annimmt?

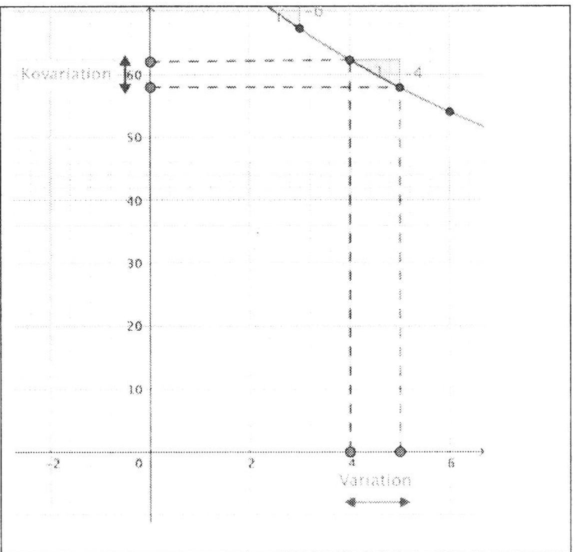
Kovariation – sichtbar an Tabelle und Graph

Variation

Zeit in min	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Temperatur in °C	86	79	73	67	62	58	54	51	48

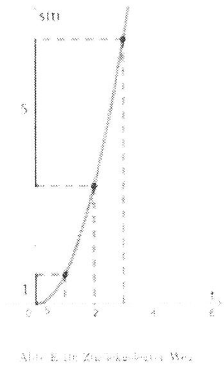
Kovariation

Das Entscheidende beim Kovariationsaspekt ist, dass es nicht mehr genügt, einzelne Wertepaare zu betrachten. Denn es müssen jeweils mehrere benachbarte Werte zueinander in Beziehung gesetzt werden. Bei der Kovariationsvorstellung wird also der Blick darauf gerichtet, wie die Änderung von x mit der Änderung von y zusammenhängt. Hierbei wird also die Werttabelle (wenn sie senkrecht angeschrieben ist) in vertikaler Richtung betrachtet.



Der Kovariationsaspekt bzw. das Änderungsverhalten spielt bei der Erarbeitung der Differenzierbarkeit eine wichtige Rolle, denn gerade dort wird die Veränderung der Funktionswerte bei Veränderung der Argumente studiert.

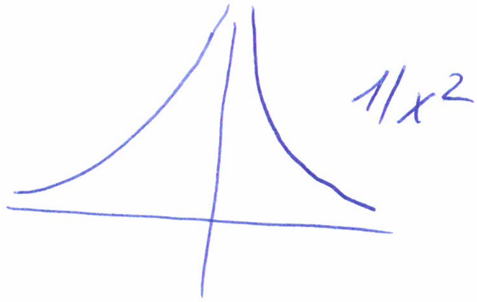
Auch beim Zugang zur Differentialrechnung über die Momentangeschwindigkeit nütz diese Vorstellung bzw. diesen Aspekt. Da dort (Aufgabe – Geschwindigkeit) die Veränderung des zurückgelegten Weges in unterschiedlichen gleichlangen/nicht gleich langen Zeitintervallen betrachtet wird (vgl. Grundvorstellung von Funktionen – Kovariation). Dies zeigt sich grafischen an anlogen Abbildungen zu oben.



3.2.

Unter einer Funktion zwischen zwei Mengen versteht man eine Zuordnung, die jedem Element der Definitiosnmenge genau ein Element der Zielmenge zuordnet. Eine Folge kann (formal) als eine Funktion mit Definitionsbereich IN angesehen werden. Das bedeutet, dass die Funktionswerte durchnummeriert sind. Das verdeutlicht den entscheidenden Unterschied zwischen einer Folge und einer Menge, die eine Ansammlung nicht geordneter Elemente ist.

3.3 (a)



(b) <u>Fachlich</u>: Die Funktion $f(x) = 1/x^2$ ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht definiert (der „natürliche" Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Daher ist die Frage ob $f(x)$ in $x_0 = 0$ stetig ist <u>mathematisch sinnlos</u>.

<u>Didaktisch</u>: Falls der Lehrer den oben beschriebenen Sachverhalt erklären wollte, wäre die Frage gegebenenfalls sinnvoll. Der weitere Verlauf der Sequenz legt aber nahe, dass sich der Lehrer der Problematik <u>nicht</u> bewusst ist. Insofern ist es eine ganz <u>schlecht</u> gestellte Frage.

(c) Es ist korrekt, dass $\lim_{x \to 0} 1/x^2 = \infty$ gilt.

[Das hat aber nichts mit der Stetigkeit zu tun, lediglich mit der Frage, ob $1/x^2$ bei $x_0 = 0$ stetig fortsetzbar ist. Aus der Tatsache $1/x^2 \to \infty \ (x \to 0)$ folgt, dass dem <u>nicht</u> so ist.]

(d) Liebe Adam,

hier liegt eine Begriffsverwirrung vor. Eine Funktion kann <u>nur</u> in solchen Punkten stetig sein, in denen sie überhaupt definiert ist. Da $1/x^2$ in $x_0=0$ garnicht definiert ist, ist die Frage nach der Stetigkeit in dieser Form <u>sinnlos</u>.

[Andererseits kann man sich fragen, ob $1/x^2$ irgendwie über die Definitionslücke bei $x_0=0$ fortgesetzt werden kann, sodass insgesamt eine stetige Funktion entsteht. Du hast richtig argumentiert, dass das <u>nicht</u> möglich ist.]

4.1 Zugänge zum Ableitungsbegriff

Zugang über das Tangentenproblem	**Zugang über Momentangeschwindigkeit**
1. Schritt: Definition der Steigung einer Kurve in einem Punkt mittels Tangente • Die Steigung von Geraden • Der (geometrische) Tangentenbegriff Paradigmenwechsel (geometrische/analytische Tangentenbegriff) – problematisch Stützgerade bei f(x) = x^2 Schmiegegerade z.B. bei f(x) = x^3; Tangente berührt den Graphen nicht nur, sondern auch Schnittpunkte **2. Schritt:** Die Tangente als Grenzlage von Sekanten knüpft nicht an Schritt 1 an, weil jetzt mit Sekanten gearbeitet wird **3. Schritt:** Berechnung der Tangentensteigung als Grenzwert Dabei wird mit dem Grenzwert des Differenzenqoutienten gearbeitet; im typischen Schulbeispiel (f(x) = x^2 mit Tangente im Punkt (1,1)) streben im Zähler und Nenner x gegen x_0, somit streben Zähler und Nenner gegen 0, obwohl der Quotient einen wohldefinierten Grenzwert hat (hier die Zahl 2). Zudem Fehlvorstellung: Sekanten als Sehnen – diese ziehen sich auf einen Punkt zusammen	lokalen Änderungsrate gestellt und in der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler Weg-Zeit-Funktionen s(t) = t^2 Betrachtungen am Graphen: Der zurückgelegte Weg s(t) wächst mit der Zeit t. Mit fortschreitender Zeit wächst der zurückgelegte Weg immer rascher, der Wagen wird also schneller. Danach folgt Berechnung des zurückgelegten Wegs von konkreten gleichlangen/beliebig langen Zeitintervallen. Danach folgen eine Verallgemeinerung und die Berechnung von mittleren Geschwindigkeiten. Die Frage nach der Momentangeschwindigikeit zu einem bestimmten Zeitpunkt wird mittels Annäherung (von links und rechts) an diesen Zeitpunkt beantwortet. Eine entsprechende allgemeine Schlussbetrachtung runden den Zugang ab. Insgesamt genügt also hier eine Idee.

4.2. Grunderfahrungen

(a) Grunderfahrungen beschreiben

(G1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen (mathematischer Blick),
(G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen (mathematische Welt),
(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, zu erwerben (heuristische Fähigkeiten).

(b) **Zweite Grunderfahrung im Gebiet der Differentialrechnung**

Im Zusammenhang mit den Differentiations-/Ableitungsregeln zeigt sich die Wirkmächtigkeit/Wirksamkeit/Leistungsfähigkeit des Kalküls – sprich der einzelnen Regeln.
Zeigt sich in einer Zusammenschau der Ableitungsregel. Außerdem besagen die Ableitungsregelns ja nichts anderes, als dass die Differentiation mit den Grundoperationen für Funktionen „verträglich“ sind.

4.3. Aspekte des Folgenbegriffs

Iterationsaspekt bzw. Rekursionsaspekt des Folgenbegriffs

Jedes Folgenglied (außer dem ersten) wird sukzessive aus seinem Vorgänger (seinen Vorgängern) konstruiert.

Man spricht von einer rekursiven Darstellung einer Folge (a_n), wenn die einzelnen Folgenglieder mit Hilfe ihres Vorgängers (oder auch mehrerer Vorgänger) angegeben werden. Der Einfachheit halber besprechen wir hier nur ersteren Fall und formulieren genauer: Gegeben ist ein Startwert a_0 und eine Vorschrift, wie aus an sein Nachfolger a_{n+1} konstruiert werden kann.

Aufzählungsaspekt des Folgenbegriffs

Eine Folge wird als sukzessive Auflistung, Aneinanderreihung, Reihenfolge oder Aufzählung von Zahlen oder Objekten betrachtet.

Beim Aufzählungsaspekt handelt sich um einen Aspekt des Folgenbegriffs, der Schülerinnen ¨ und Schülern aus vielfältigen (Alltags-)Erfahrungen bereits seit langem vertraut ist. Wichtig ist im Zusammenhang mit dem Aufzählungsaspekt, dass die Objekte nicht in einer beliebigen Reihenfolge aufgezählt werden, sondern dass das Ordnen und Auflisten in Form einer Reihenfolge erfolgt. So können Spielkarten beispielsweise nach ihrer Wertigkeit geordnet werden:
Herz-Bube, Herz-Dame, Herz-König, Herz-As. Während geometrische Figuren beispielsweise nach ihrer Eckenanzahl geordnet werden können: Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, ... Das ¨ geordnet Auflisten dient dem Erkennen von Eigenschaften.

Zuordnungsaspekt des Folgenbegriffs

Eine Folge ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl einen Funktionswert zuordnet.

Dieser Aspekt wird in Anbetracht der mathematischen Faktenbox 3: Folgen wenig überraschen, Folgen lassen sich ja als (spezielle) Funktionen interpretieren, ja wir haben sie sogar als solche definiert: Jeder natürlichen Zahl k wird ein Wert a_k Element aus IR zugeordnet. Der Zuordnungsaspekt lässt sich wie schon bei Funktionen an Tabellen und Graphen veranschaulichen.
Mathematisch gesprochen ist der Zuordnungsaspekt charakterisierend und wird in der Analysis verwendet, um den Folgenbegriff zu definieren.