

Nachname:
Vorname:
Matrikelnr:

1	2	3	4	Σ	Note

**Prüfung zu
Schulmathematik Analysis
WS 2018/19, R. Steinbauer, E. Süß-Stepancik
4. Termin, 26.6.2019
GRUPPE A**

1 Faktenwissen zur Schulmathematik Analysis

Kreuzen Sie für jede Antwortmöglichkeit an, ob Sie diese für richtig (R) oder falsch (F) bzw. zutreffend halten. (Je 1 Punkt pro richtiger Antwort.)

- 1.1. Es gibt bijektive Funktionen, die nicht injektiv sind. (R) (F)
- 1.2. Hat eine (reelle) Folge genau einen Häufungswert, dann konvergiert sie schon. (R) (F)
- 1.3. Wenn eine (reelle) Folge nicht konvergiert, dann ist sie unbeschränkt. (R) (F)
- 1.4. Was gilt? — Setzen Sie für beide Richtungen jeweils den korrekten Pfeil \Rightarrow oder \nRightarrow , sowie \Leftarrow oder \nLeftarrow ein!

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \quad \dots \quad a_n \rightarrow 0$$

- 1.5. Liegen fast alle Glieder der (reellen) Folge (x_n) in jeder ε -Umgebung von a , dann ist a Grenzwert der Folge (x_n) . (R) (F)
- 1.6. Jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. (R) (F)
- 1.7. Für die Tangente t an eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt 0 gilt

$$\frac{r(h)}{h} := \frac{f(h) - t(h)}{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

- (R) (F)
- 1.8. Für je zwei beliebige Stammfunktionen F und G der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $F(x) - G(x) = C$ wobei C eine Konstante ist. (R) (F)
- 1.9. Eine gültige Schreibweise für die erste Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ist

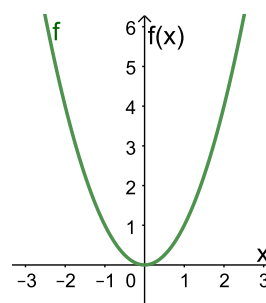
$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) dx = f(x).$$

(R) (F)

1.10. Welche Eigenschaften haben die gegebenen Funktionen auf dem jeweiligen Definitions- und Zielbereich? Kreuzen Sie an!

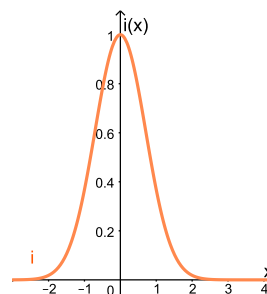
(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$

- injektiv ja nein
 surjektiv ja nein



(b) $i: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), i(x) = \exp(-x^2)$

- injektiv ja nein
 surjektiv ja nein



- 1.11. Jede nach oben beschränkte Menge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Supremum. (R) (F)
- 1.12. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig. (R) (F)
- 1.13. Eine streng monoton wachsende differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat überall eine positive Ableitung. (R) (F)
- 1.14. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$ kann auf ganz \mathbb{R} definiert werden und ist dort auch differenzierbar. (R) (F)
- 1.15. Welche Implikationen gelten für eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$? — Setzen Sie für beide Richtungen jeweils den korrekten Pfeil \Rightarrow oder \nRightarrow , sowie \Leftarrow oder \nLeftarrow ein!

$$f'(x_0) = 0 \quad \dots \quad x_0 \text{ ist lokale Extremstelle von } f$$

2 Offene Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

2.1. Folge & Grenzwert.

Geben Sie mathematisch exakte Definitionen der Begriffe (je 1P)

- (a) reelle Folge und
 (b) Grenzwert einer reellen Folge.

2.2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Formulieren Sie mathematisch exakt den ersten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (1P) und geben Sie eine Beweisskizze. (3P)

2.3. Stetige Funktionen.

Geben Sie je ein Beispiel einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die (je 1P)

- (a) auf ganz \mathbb{R} stetig ist
 (b) die auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig, aber in $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

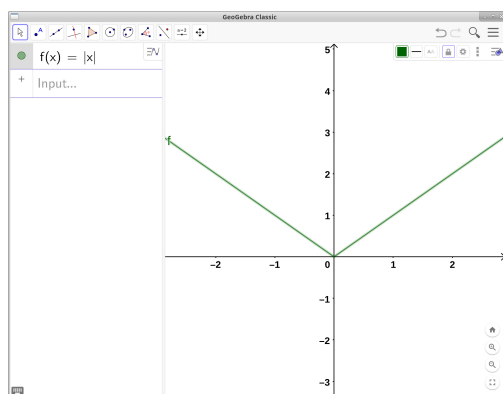
2.4. Grenzwert vs. Häufungswert

- (a) Beschreiben Sie kurz und prägnant den Unterschied zwischen den Begriffen Grenzwert und Häufungswert einer (reellen) Folge. (2P)
- (b) Geben Sie je ein Beispiel einer reellen Folge die (je 1P)
- zwei (verschiedene) Häufungswerte besitzt
 - (genau) einen Häufungswert besitzt, aber *nicht* konvergiert.

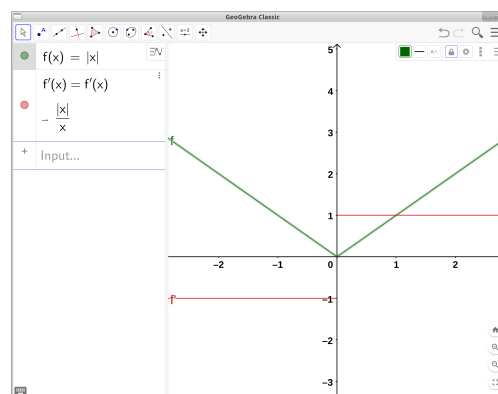
3 Offene Aufgaben zur Unterrichtspraxis

3.1. Unterrichtssituation.

Betrachten Sie die folgende Unterrichtssequenz: Es wird die Differenzierbarkeit der Betragsfunktion $f(x) = |x|$ thematisiert. Es soll $f'(0)$ berechnet werden. Untenstehende Graphik 1 ist an die Wand projiziert.



Graphik 1



Graphik 2

Lehrerin: Wir versuchen, die Ableitung an der Stelle 0 auszurechnen. Was müssen wir da tun?

Peter: Na einfach ableiten! $f'(x) = 1$.

Mila: Aber das kommt darauf an, ob der Betrag positiv oder negativ ist.

Lehrerin: Ich glaube, du meinst das Richtige! Für negative x ist die Ableitung etwas anderes als für positive x .

Mila: Genau. Links -1 und rechts 1 .

Lehrerin: Sehr gut! Aber was ist mit $x = 0$?

Mila: Na da kommt nichts raus, weil der linke und der rechte Grenzwert nicht übereinstimmen.

Peter: Doch, da kommt 0 raus!

Lehrerin: Langsam. Machen wir das einmal mit der Definition. (Schreibt an der Tafel und spricht dazu)

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

Peter: Das ist aber blöd, da kommt $\frac{0}{0}$ raus. Ich gebs mal in Geo-Gebra ein. (Tippt auf seinem Tablet „f'(x)“ ein, was den Output in Graphik 2 liefert.) Also doch 0, oder?

Bearbeiten Sie nun die folgenden Punkte:

- (a) Klären Sie die Situation aus fachlicher Hinsicht: In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Betragsfunktion differenzierbar in welchen nicht? Wie lautet die Ableitung in den Punkten, wo Differenzierbarkeit vorliegt? Aus welchem Grund ist sie in den anderen Punkten nicht differenzierbar? (2P)

- (b) Bewerten Sie vor diesem Hintergrund die letzte Aussage von Mila. Ist sie korrekt? Wie könnte die Lehrerin diese Aussage produktiv ins Unterrichtsgeschehen integrieren, um somit die Verwendung der Definition des Differenzialquotienten zu motivieren. (4P)
 - (c) Übernehmen Sie die Rolle der Lehrerin und klären Sie die Situation vollständig. (3P)
- 3.2. *Prinzip des Kontrasts*. Beschreiben Sie das Prinzip des Kontrasts im Allgemeinen. Arbeiten Sie eine Aufgabenstellung zur Erarbeitung des Begriffs der geometrischen Folge aus, die auf dem *Prinzip des Kontrasts* beruht und erstellen Sie eine entsprechende Lösungserwartung. (5P)

4 Offene Aufgaben: Fachdidaktische Reflexionen

- 4.1. *Aspekte des Funktionsbegriffs*.
(a) Was versteht man in der Fachdidaktik unter einem Aspekt eines mathematischen Begriffs? Wie verhalten sich Aspekte und Grundvorstellungen zueinander? (2P)
(b) Geben Sie alle Aspekte und Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff an und beschreiben Sie diese und ihre respektiven Zusammenhänge möglichst prägnant. (6P)
- 4.2. *Schmiegegerade vs. Tangente*.
Diskutieren Sie die Begriffe Schmiegegerade und Tangente im Kontext des Zugangs zum Ableitungsbegriff über das Tangentenproblem. Gehen Sie dabei insbesondere auf den meist stillschweigend vollzogenen Paradigmenwechsel zwischen geometrischem und analytischem Tangentenbegriff ein. (3P)
- 4.3. *Grunderfahrungen*.
Beschreiben Sie die drei Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts nach Winter. (3P)