Nachname:
Vorname:
Matrikelnr:

1	2	3	4	$\sum$	Note

Prüfung zu

Schulmathematik Analysis

WS 2018/19, R. Steinbauer, E. Süss-Stepancik

1. Termin, 31.1.2019

GRUPPE $\boxed{\text{A}}$

1 Faktenwissen zur Schulmathematik Analysis

Kreuzen Sie für jede Antwortmöglichkeit an, ob Sie diese für richtig (R) oder falsch (F) bzw. zutreffend halten. (Je 1 Punkt pro richtiger Antwort)

1.1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sicher) unstetig, wenn

(a) ihr Graph einen Sprung hat. (R) (F)

(b) ihr Graph einen Knick hat. (R) (F)

1.2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist (sicher) nicht differenzierbar, wenn

(a) ihr Graph einen Sprung hat. (R) (F)

(b) ihr Graph einen Knick hat. (R) (F)

1.3. Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist

(a) eine Facette des Begriffs, mit dem dieser fachlich beschrieben wird. (R) (F)

(b) eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt. (R) (F)

1.4. Eine korrekte Schreibweise für eine Funktion f von der Menge A in die Menge B ist

(a) $f : A \to B,\ a \mapsto f(a)$ (R) (F)

(b) $f : A \mapsto B,\ a \to f(a)$ (R) (F)

1.5. Eine korrekte Schreibweise für den Sachverhalt, dass eine Folge (x_n) gegen den Grenzwert x konvergiert ist

(a) $\lim_{n\to\infty} x_n \to x$ (R) (F)

(b) $x_n \to x\ (n \to \infty)$ (R) (F)

1.6. Jede nach oben beschränkte und monoton wachsende (reelle) Folge hat einen Grenzwert. (R) (F)

1.7. Für eine (reelle) Folge gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ falls,
$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad |x_n - a| < \varepsilon$ (R) (F)

1.8. Die Folge $\langle 2, 4, 6, 8, 10, \dots \rangle$ ist eine Folge. (1) arithmetische (2) geometrische

1.9. Wenn eine (reelle) Folge nicht konvergiert,
dann ist sie unbeschränkt. (R) (F)

1.10. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$
gegen der Wert $c \in \mathbb{R}$, falls
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: \quad \forall x \geq \delta \implies |f(x) - c| < \varepsilon.$ (R) (F)

1.11. Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, \infty))$
ist differenzierbar auf $(0, \infty)$ (R) (F)

1.12. Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar. (R) (F)

1.13. Rationale Funktionen sind auf
ihrem ganzen Definitionsbereich differenzierbar. (R) (F)

1.14. Eine streng monoton wachsende differenzierbare Funktion
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat überall eine positive Ableitung. (R) (F)

1.15. Für jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. (R) (F)

2 Offene Aufgaben zu Fachbegriffen der Analysis

2.1. *Rekursive und explizite Darstellung von Folgen.* Die Folge (x_n) ist gegeben durch die rekursive Darstellung

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \qquad \text{und} \quad x_0 = 1.$$

(a) Berechnen Sie x_1, x_2 und x_3. (2P)

(b) Leiten Sie die explizite Darstellung der Folge (x_n) her. Berechnen Sie damit x_{10}. (4P)

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n$. (1P)

2.2. *Injektiv, Surjektiv.* Geben Sie mittels Pfeildiagramm eine Funktion zwischen endlichen Mengen an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist und eine die surjektiv, aber nicht injektiv ist. (2P)

2.3. *Darstellung von Folgen.* Beschreiben Sie die beiden Arten reelle Folgen graphisch darzustellen und den Zusammenhang zwischen diesen Darstellungen. Illustrieren Sie ihre Ausführungen anhand eines Beispiels. (3P)

3 Offene Aufgaben zur Unterrichtspraxis

3.1. *Kovariationsaspekt.* Erklären Sie kurz und bündig aber unter Einbeziehung graphischer Darstellungen, was unter dem Kovariationsaspekt des Funktionsbegriffs verstanden wird. Welche Rolle kann dieser bei der Erarbeitung der Differenzierbarkeit spielen? Diskutieren Sie! (3P)

3.2. *Folgen vs. Funktionen.* Erklären Sie schülergerecht (6. Klasse AHS) den Zusammenhang zwischen dem Funktions- und dem Folgenbegriff. (2P)

3.3. *Unterrichtssequenz.* Betrachten die die folgende Unterrichtssequenz:

Der Lehrer wendet sich an die Klasse:
Lehrer: Ist die Funktion mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ stetig an der Stelle 0?
Er zeichnet den Graphen an die Tafel.
Lehrer: Na was heißt den stetig?
Adam: Dass die Funktion keinen Sprung macht.
Lehrer: Und wie ist das hier? Macht die Funktion einen Sprung?
Adam: Na, eigentlich nicht. Das geht ja von Unendlich nach Unendlich.
Lehrer: Aber Unendlich ist ja kein Funktionswert, oder?
Adam: Na dann ist sie nicht stetig, oder?
Lehrer: Die Funktion $f(x)$ geht ja für x gegen 0 gegen Unendlich. Also ist sie nicht stetig.
Adam: Hm, okay!

Bearbeiten Sie nun die folgenden Punkte:

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen der angesprochenen Funktion. (1P)

(b) Bewerten Sie die ursprüngliche Frage des Lehrers aus fachlicher Sicht und aus didaktischer Sicht. (Ist sie gut (gestellt)? Warum bzw. warum nicht?) (3P)

(c) Bewerten Sie die abschließende Erklärung des Lehrers aus fachlicher Sicht. (1P)

(d) Erklären Sie (schriftlich) dem Schüler Adam den Sachverhalt. (2P)

Bitte umblättern!

4 Offene Aufgaben: Fachdidaktische Reflexionen

4.1. *Zugänge zum Ableitungsbegriff.* Beschreiben Sie prägnant den Zugang zum Ableitungsbegriff über das Tangentenproblem und den Zugang über die Momentangeschwindigkeit. Vergleichen Sie die beiden Zugänge hinsichtlich ihrer didaktischen und mathematischen Kohärenz. (8P)

4.2. *Grunderfahrungen.*

   (a) Beschreiben Sie die drei Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts nach Winter. (3P)

   (b) Welche Inhalte der Schulanalysis im Gebiet Differentialrechnung eignen sich besonders gut, um die 2. der Grunderfahrungen zu vermitteln? Begründen Sie! (2P)

4.3. *Aspekte des Folgenbegriffs.* Beschreiben Sie kurz die drei Aspekte des Folgenbegriffs. (3P)