

# Hyperbolische Geometrie

von Sebastian KALINKA und Alexander THOMASO  
nach dem Buch *Elementare Differentialgeometrie* von Christian BÄR

## 1 Wiederholung

Für  $\kappa \in \mathbb{R}$  setzt man  $\hat{\mathbb{M}}_\kappa := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \kappa(y^2 + z^2) = 1\}$ . Für  $\kappa = 1$  ist das die Sphäre, für  $\kappa = 0$  zwei parallele Ebenen durch  $(\pm 1, 0, 0)^\top$  und für  $\kappa = -1$  ein zweischaliges Hyperboloid. Man definiert dabei  $\mathbb{M}_\kappa$  so, dass für  $\kappa \leq 0$  lediglich jene Schale bzw. Ebene in positiver  $x$ -Richtung übrig bleibt. Mit der ersten Fundamentalform als riemannscher Metrik haben Sphäre bzw. Ebene konstante Gauß-Krümmung 1 bzw. 0, jedoch hat  $\mathbb{M}_{-1}$  nicht Gauß-Krümmung  $-1$ . Um das zu erreichen, wählt man eine neue riemannsche Metrik.

Man definiert zunächst die symmetrische Bilinearform<sup>1</sup>

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\rangle_\kappa := \frac{xx'}{\kappa} + yy' + zz'$$

auf  $\mathbb{R}^3$ , was für  $\kappa = 1$  das übliche euklidische Skalarprodukt und für  $\kappa = -1$  das sogenannte Minkowski-Skalarprodukt ergibt. Letzteres ist indefinit. Die riemannsche Metrik auf  $\mathbb{M}_\kappa$  definiert man durch Einschränkung von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\kappa$  auf  $T_p\mathbb{M}_\kappa$ . Es ergibt sich, dass diese Einschränkung positiv definit ist. Somit ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\kappa|_{T_p\mathbb{M}_\kappa \times T_p\mathbb{M}_\kappa}$  eine riemannsche Metrik.

**Definition (hyperbolische Ebene):** Man bezeichnet die reguläre Fläche  $\mathbb{M}_{-1}$  zusammen mit der riemannschen Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}|_{T_p\mathbb{M}_{-1} \times T_p\mathbb{M}_{-1}}$  als *hyperbolische Ebene*.

Für die Gauß-Krümmung von  $\mathbb{M}_\kappa$  gilt mit dieser riemannschen Metrik  $K = \kappa$ , weshalb insbesondere die hyperbolische Ebene Gauß-Krümmung  $K = -1$  besitzt. Die Spuren der Geodätischen von  $\mathbb{M}_\kappa$  entsprechen genau den Durchschnitten von  $\mathbb{M}_\kappa$  mit den Ebenen durch  $(0, 0, 0)^\top$ . Dies sind für  $\kappa = 1$  die Großkreise, für  $\kappa = 0$  Geraden und für  $\kappa = -1$  Hyperbeln.

**Definition (Konformität bzw. Winkeltreue):** Seien  $S$  und  $S'$  reguläre Flächen mit den riemannschen Metriken  $g$  und  $g'$ . Ein lokaler Diffeomorphismus  $\Phi : S \rightarrow S'$  heißt *konform* (bzw. *winkeltreu*), falls es eine positive Funktion  $c : S \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass  $\Phi^*g' = c \cdot g$ .

Eine lokale Parametrisierung  $(U, F, V)$  einer regulären Fläche  $S$  mit riemannscher Metrik  $g$  heißt konform, wenn es eine positive Funktion  $c : U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodass  $(g_{ij}(u^1, u^2)) = c(u^1, u^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  gilt.

## 2 Einleitung

Welche Bedeutung kommt nun der nicht-euklidischen<sup>2</sup> und somit auch der hyperbolischen Geometrie zu? Bis ins 19. Jahrhundert wurde davon ausgegangen, dass durch die euklidische Geometrie

<sup>1</sup>Aus Konsistenzgründen befindet sich  $\kappa$  hier im ersten Term, während es im Buch im dritten Term auftritt. Auch  $\hat{\mathbb{M}}_\kappa$  wurde abweichend definiert.

<sup>2</sup>Damit ist gemeint, dass für eine solche Geometrie mindestens ein Axiom der euklidischen Geometrie nicht erfüllt ist.

der uns umgebende physikalische Raum beschrieben wird. Entwickelt wurden die nichteuklidischen Geometrien nicht mit dem Anspruch, unsere Raumerfahrung zu präzisieren, sondern als axiomatische Theorien in der Auseinandersetzung mit dem Parallelenproblem. Meist wurden sie als rein abstrakt-mathematische Theorien verstanden, die nur durch die Ähnlichkeit der Begriffe und Axiomensysteme den Namen Geometrie verdienen. Als relevant für unseren Anschauungsraum (dies ist per Definition der  $\mathbb{R}^3$ ) wurden diese nicht erachtet; insbesondere durch den Einfluss einiger Philosophen wie Kant waren viele weiterhin davon überzeugt, dass unser Anschauungsvermögen uns eine euklidische Geometrie aufzwänge. Es wurde zwar gezeigt – und das ist für die Mathematik enorm wichtig – dass nicht-euklidische Formen der Geometrie widerspruchsfrei sind, aber die reine Anschauung des Menschen (und diese nahm man eben als euklidisch an) war wohl für diese Philosophen noch eine uneinnehmbare Festung. Im Jahre 1868 änderte sich das, als es Beltrami gelang, im Rahmen der euklidischen Geometrie ein Modell für die hyperbolische Geometrie zu konstruieren. Bereits 1870 zeigte Helmholtz in einem Vortrag, dass wir uns eine nicht-euklidische Welt vorstellen können und damit Kants These von der reinen Anschauung als Quelle der euklidischen Geometrie widerlegt ist. Erst Einsteins Arbeiten zeigten die Tragweite nicht-euklidischer Geometrien in der Physik tatsächlich auf. Gemäß seiner allgemeinen Relativitätstheorie weicht die Geometrie des Weltalls von der euklidischen ab, weil Schwerfelder den Raum „krümmen“. Ob die Geometrie des Universums „im Großen“ sphärisch (elliptisch), eben (euklidisch) oder hyperbolisch ist, gehört zu den großen aktuellen Fragen der Physik.

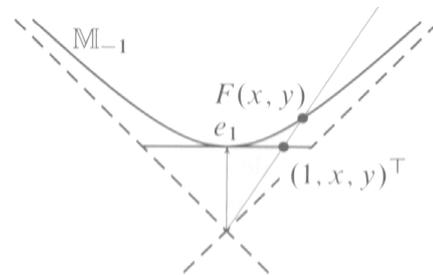
Wir kommen nun zur mathematischen Untersuchung der hyperbolischen Ebene. Es ist (im Gegensatz zur Sphäre) möglich, Karten zu finden, welche die gesamte hyperbolische Ebene erfassen. Eine solche Karte nennt man *Modell der hyperbolischen Geometrie*. Ist  $(U, F, V)$  eine derartige Karte, dann ist  $F$  ein Diffeomorphismus von  $U$  nach  $\mathbb{M}_{-1}$ , weshalb die Untersuchung der hyperbolischen Geometrie in  $U$  stattfinden kann. Wie bereits in der Einleitung erwähnt entsprechen Geodätische den Schnitten von  $\mathbb{M}_{-1}$  und Ebenen, welche den Nullpunkt  $(0, 0, 0)^\top$  enthalten. Die riemannsche Metrik entsteht durch Einschränkung von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}$ . Analog zur sphärischen Geometrie (d. h. Kartographie, siehe Vortrag 9) lassen sich auch in der hyperbolischen Geometrie verschiedene Modelle mit besonderen Eigenschaften konstruieren. Heute sind die im folgenden Kapitel vorgestellten drei Modelle am populärsten.

### 3 Spezielle Modell der hyperbolischen Ebene

#### 3.1 Kleinsches Modell

*Dieses Modell geht zurück auf Eugenio Beltrami (1835–1900), Felix Klein (1849–1925) und Arthur Cayley (1821–1895). Andere Bezeichnungen sind Cayley-Klein-Modell, projektives Modell, Beltrami-Klein-Modell oder vereinzelt auch Bierdeckelgeometrie.*

Das Kleinsche Modell ist das hyperbolische Analogon zur gnomonischen Karte der Sphäre. Man erhält dieses Modell durch Zentralprojektion der (offenen) Einheitskreisscheibe in  $T_{e_1}\mathbb{M}_{-1}$ , also in der Tangentialebene durch  $e_1 \in \mathbb{M}_{-1}$ , auf  $\mathbb{M}_{-1}$ . Der Projektionsursprung ist dabei der Punkt  $(0, 0, 0)^\top$ . Dies bedeutet, dass hier



$U := \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  und

$$F(x, y) := \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

verwendet wird. Nebenstehende Abbildung verdeutlicht diese Projektion. Unter Verwendung von

$$g_{ij}(x^1, x^2) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}(x^1, x^2), \frac{\partial F}{\partial x^j}(x^1, x^2) \right\rangle_{-1}$$

ergibt sich die Metrik

$$(g_{ij}(x, y)) = \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 - y^2 & xy \\ xy & 1 - x^2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Das Kleinsche Modell besitzt die angenehme Eigenschaft, dass Geodätische in  $\mathbb{M}_{-1}$  (gemäß der Definition von  $F$ ) Geraden in  $U$  entsprechen. Jedoch ist das Kleinsche Modell nicht konform.

### 3.2 Poincarésches Scheibenmodell

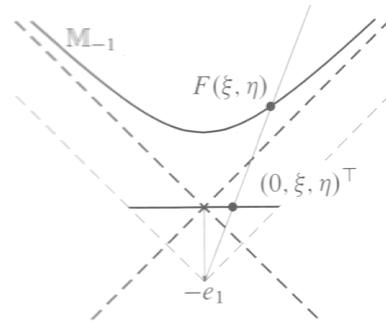
Dieses Modell bildet das hyperbolische Analogon zur stereografischen Projektion der sphärischen Geometrie. Im Gegensatz zum Kleinschen Modell wird der Projektionspunkt von  $(0, 0, 0)^\top$  nach  $-e_1$  verlagert. In Hinblick auf die Einfachheit der Ergebnisse wird hier nicht auf  $T_{e_1}\mathbb{M}_{-1}$  sondern auf die von  $e_2$  und  $e_3$  ausgespannte Ebene projiziert, was sich lediglich durch einen Streckungsfaktor 2 bemerkbar macht. Somit bleibt  $U$  die Einheitskreisscheibe und für  $F$  erhält man:

$$F(\xi, \eta) := \frac{1}{1 - \xi^2 - \eta^2} \begin{pmatrix} 1 + \xi^2 + \eta^2 \\ 2\xi \\ 2\eta \end{pmatrix}$$

Als Metrik ergibt sich für dieses Modell folgende:

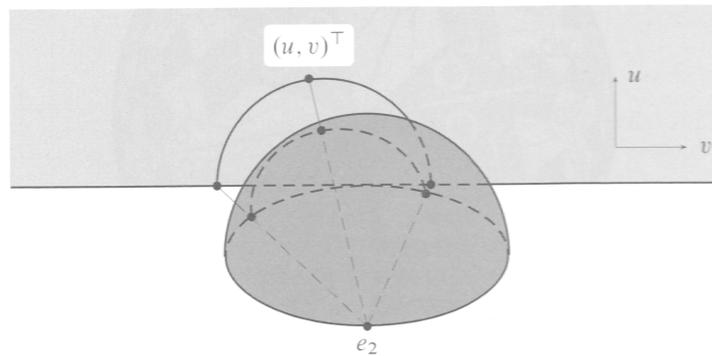
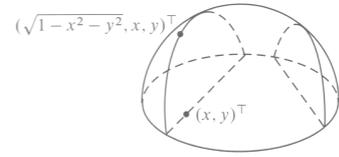
$$(g_{ij}(\xi, \eta)) = \frac{4}{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Dieses Modell ist also konform. Man nennt es deshalb auch das *konforme Scheibenmodell*. Je-ne Geodätischen, die durch Schnitte von  $\mathbb{M}_{-1}$  mit Ebenen, welche die Punkte  $(0, 0, 0)^\top$  und  $(e_1, 0, 0)^\top$  enthalten, entstehen, sind Geraden durch den Mittelpunkt der Einheitskreisscheibe. Die weiteren Geodätischen entsprechen Kreisbögen, welche den Rand der Einheitskreisscheibe senkrecht schneiden.



### 3.3 Poincarésches Halbebenenmodell

Durch Parallelprojektion wird eine Abbildung des Kleinschen Modells auf die obere Halbsphäre durchgeführt, also  $(x, y)^\top \mapsto (\sqrt{1-x^2-y^2}, x, y)^\top$ . Geraden in der Kreisscheibe werden zu Kreisbögen, welche den Äquator senkrecht treffen. Nun wählt man einen beliebigen Punkt des Äquators und führt eine stereographische Projektion von diesem Punkt auf die Tangentialebene der Sphäre im gegenüberliegenden Punkt durch. Dadurch wird die obere Halbsphäre auf die obere Halbebene abgebildet, wodurch jene Kreisbögen, die den Projektionsursprung nicht enthalten, Kreisbögen bleiben und die anderen Kreisbögen werden zu Geraden.



In beiden Fällen treffen die Resultate den Rand der Halbebene senkrecht. Das Bild dieser Projektion sieht folgendermaßen aus

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{1-x} \begin{pmatrix} 2\sqrt{1-x^2-y^2} \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Durch Auflösen nach  $(x, y)^\top$  und Einsetzen in die Parametrisierung des Kleinschen Modells erhält man schließlich nachfolgende Metrik. Dies zeigt, dass auch dieses Modell konform ist.

$$(g_{ij}(u, v)) = \frac{1}{u^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

### 3.4 Überblick

Nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften der vorgestellten Modelle.

| Modell                         | Geodätische  | Konform | Metrik     |
|--------------------------------|--|---------|------------|
| Kleinsches Modell              | Geraden  | nein    | Formel (1) |
| Poincarésches Scheibenmodell   | Kreisbögen senkrecht auf Rand bzw. Geraden durch Mittelpunkt | ja      | Formel (2) |
| Poincarésches Halbebenenmodell | Kreisbögen bzw. Geraden senkrecht auf Rand der Halbebene     | ja      | Formel (3) |

## 4 Weitere Eigenschaften der hyperbolischen Ebene

### 4.1 Flächeninhalt der hyperbolischen Ebene

**Satz:** Die hyperbolische Ebene besitzt unendlichen Flächeninhalt.

*Beweis:* Um die Behauptung zu zeigen, wird das Kleinsche Modell verwendet. Durch die zuvor berechnete Metrik (1) ergibt sich für das Flächenelement  $dA$  folgendes

$$dA = \sqrt{\det g_{ij}(x, y)} dx dy = (1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy.$$

Durch Integration über  $U$  mittels Transformation auf Polarkoordinaten erhält man folgendes Resultat:

$$\int_U (1 - x^2 - y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)^{-\frac{3}{2}} r dr d\theta = 2\pi \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \right]_{r=0}^1 = \infty$$

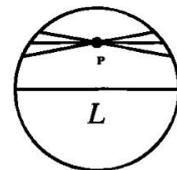
Somit hat die hyperbolische Ebene unendlichen Flächeninhalt.  $\square$

### 4.2 Bemerkungen zum Parallelenaxiom

Die Axiome der euklidischen Geometrie lauten folgendermaßen:

- **Inzidenzaxiome:** Diese Axiome treffen Aussagen über das Enthaltensein von Punkten in Geraden. (z. B.: Durch je zwei verschiedene Punkte geht eine Gerade.)
- **Anordnungsaxiome:** Hier geht es um Aussagen der Form „ $q$  liegt zwischen  $p$  und  $r$ “ (hierbei sind  $q, p, r$  Punkte).
- **Kongruenzaxiome:** Diese befassen sich, wie der Name bereits vermuten lässt, mit der Kongruenz von Strecken und Winkeln.
- **Vollständigkeitsaxiome:** Um die euklidische Geometrie eindeutig axiomatisch festzulegen, benötigt man diese (aus der Analysis bekannten) Axiome. Konkret sind dies das archimedische Axiom und die Maximalität.
- **Parallelenaxiom:** Sei  $L$  eine Gerade und  $p$  ein Punkt mit  $p \notin L$ . Dann gibt es höchstens eine Gerade, die  $p$  enthält und die  $L$  nicht schneidet (also zu  $L$  parallel ist).

Die Frage ist nun, ob diese Axiome auch in der hyperbolischen Geometrie gültig sind. Geodätische in  $\mathbb{M}_{-1}$  entsprechen im Kleinschen Modell Geraden in der Kreisscheibe (siehe Kapitel 3.1). Um die Axiome der euklidischen Geometrie im Rahmen der hyperbolischen zu diskutieren, nimmt man als Menge der Punkte eben diese Punkte der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{M}_{-1}$  und als Menge der Geraden die Menge der Spuren der Geodätischen. Es zeigt sich schnell, dass damit alle Axiome, welche für die euklidische Geometrie angenommen wurden<sup>3</sup> erfüllt sind – bis auf das Parallelenaxiom. Zu einem Geradensegment  $L$  in  $U$  gibt es unendlich viele Geradensegmente, die  $L$  nicht schneiden, aber einen Punkt gemeinsam haben. Man betrachte dazu nebenstehende Abbildung und beachte, dass die komplette hyperbolische Fläche auf die Kreisscheibe projiziert wurde.



<sup>3</sup>siehe dazu Kapitel 1.1 im begleitenden Buch

## 5 Veranschaulichungen

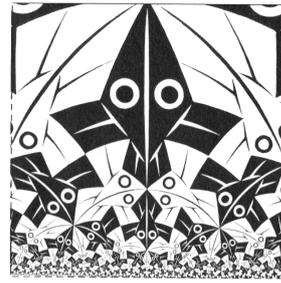
Der niederländische Künstler Maurits Cornelis Escher (1898–1972), welcher vor allem für seine Darstellung „unmöglicher“ Figuren bekannt ist, widmete sich auch der hyperbolischen Ebene. Sein Werk *Circle Limit I* stellt das Poincarésche Scheibenmodell als Holzschnitt dar (siehe unten Mitte). Man erkennt dabei deutlich den Verlauf der Geodätischen (nämlich Geraden durch den Mittelpunkt oder Kreisbögen, welche senkrecht auf den Rand stehen). Überführt man diese Darstellung in das Kleinsche Modell bzw. in das Poincarésche Halbebenenmodell, so erhält man folgendes:



Kleinsches Modell



Poincarésches Scheibenmodell



Poincarésches Halbebenenmodell

Eine weitere interessante Veranschaulichung anhand der Schatten von 3D-Modellen ist in diesem Video ersichtlich: [https://www.youtube.com/watch?v=eGEQ\\_UuQtYs](https://www.youtube.com/watch?v=eGEQ_UuQtYs).

## 6 Abbildungsverzeichnis

Alle Abbildungen wurden dem Buch *Elementare Differentialgeometrie* von Christian Bär entnommen und gegebenenfalls bearbeitet.