Die zweite Fundamentalform Krümmung

Alfons Preis und Arthur Sedivy

Überblick

- Gauß-Abbildung (= Einheitsnormalenfeld)
- Weingarten-Abbildung (= Differentiation davon)
- Die zweite Fundamentalform (= eine symm. Bilinearform, verknüpft mit der 1.FF)
- Krümmung (von Kurven zu Flächen)
- Satz von Meusnier (2.FF zur Berechnung der Krümmung von Flächen)

Gauß-Abbildung

- Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld N. Als Abbildung aufgefasst heißt

$$N:\ S \to S^2$$

auch *Gauß-Abbildung*

Weingarten-Abbildung

- Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit Orientierung gegeben durch das Einheitsnormalenfeld N. Der Endomorphismus

$$W_p : T_pS \to T_pS$$

$$W_p(X) = -d_pN(X)$$

heißt *Weingarten-Abbildung*

BEISPIELE ZUR WEINGARTEN-ABBILDUNG

- Kugel S^2 bzw $r \cdot S^2$

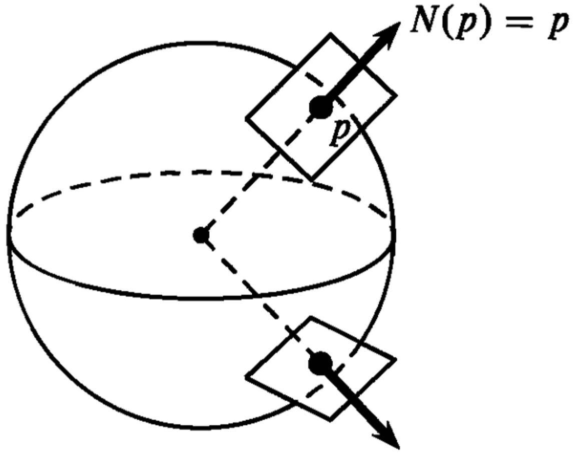

Abb. 83

- X-Y-Ebene

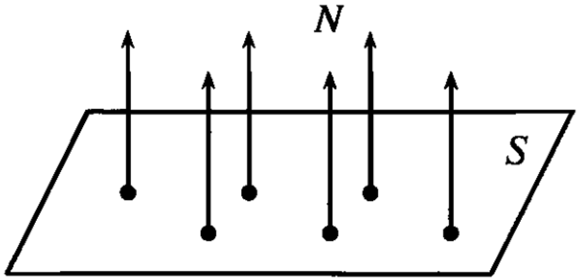

Abb. 82

- Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$

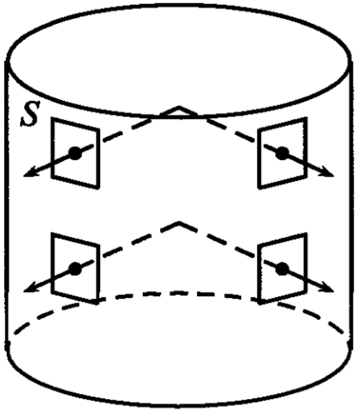

Abb. 84

Wie schaut's aus und wie komme ich dort hin

- **Zweite Fundamentalform:**

$$II_p(X,Y) = I_p\big(W_p(X), Y\big), \qquad X, Y \,\epsilon T_pS$$

- **Proposition 3.3.5.** Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Weingarten-Abbildung $W_p: T_pS \to T_pS, p \,\epsilon\, S$. Dann ist W_p selbstadjungiert bzgl. der ersten Fundamentalform.

Was wir vergessen haben

- **Weingarten-Abbildung**

$$W_p = -d_p N(X)$$

- **Satz von Schwarz**

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge sowie $f: U \to \mathbb{R}$ mindestens p-mal partiell differenzierbar und sind alle p-ten partiellen Ableitungen in U zumindest noch stetig, so ist die Reihenfolge der Differentiation in allen q-ten partiellen Ableitungen mit $q \leq p$ unerheblich

Zweite Fundamentalform

- Durch Zusammenfügen des Erlernten erhalten wir:

  Zweite Fundamentalform:

  $$II_p(X,Y) = I_p\big(W_p(X),Y\big), \qquad X,Y \in T_pS$$

Lokale Koordinaten

- Definieren wir wie folgt:

$$h_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i}(u), N(p) \right\rangle, \qquad\qquad i,j = 1,2$$

Krümmung einer Kurve

- Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare Fläche mit glattem Einheitsnormalenfeld N, $p \in S$. Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$. Aufgefasst als Raumkurve in $\mathbb{R}^3$ hat c in 0 die Krümmung $\kappa(0)$, die im Fall $\kappa(0) \neq 0$ durch

$$\ddot{c}(0) = \kappa(0) \cdot n(0)$$

gegeben ist, wobei $n(0)$ der Normalenverkor an c ist.

Krümmung von Flächen

- Gesamtkrümmung von c: Krümmung von c innerhalb von S und Krümmung von S.

$$n(0) = n(0)^{tang} + n(0)^{senk}$$

mit $n(0)^{senk} = \langle n(0), N(p)\rangle N(p)$

Also

$$\ddot{c}(0) = \kappa(0) \cdot n(0)^{tang} + \kappa(0) \cdot \langle n(0), N(p)\rangle N(p)$$

Normalkrümmung

- Definition

$$\kappa_{nor} := \langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle = \begin{cases} \kappa(0) \cdot \langle n(0), N(p) \rangle, & \text{falls } \kappa(0) \neq 0 \\ 0, & \text{falls } \kappa(0) = 0 \end{cases}$$

κ_{nor} ist die Normalkrümmung von S im Punkt p in Richtung $\dot{c}(0)$.

Zusammenfassung vor dem Höhepunkt

- **Normalkrümmung**

$$\kappa_{nor} = \langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle$$

- **Weingarten-Abbildung:**

$$W_p(X) = -d_p N(X)$$

- **Zweite Fundamentalform:**

$$II_p(X,Y) = I_p\big(W_p(X), Y\big), \qquad X, Y \in T_p S$$

Satz 3.6.1: Meusnier

- Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Einheitsnormalfeld N und zweiter Fundamentalform II. Sei $p \epsilon S$. Sei $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$. Dann gilt für die Normalkrümmung κ_{nor} von c:

$$\kappa_{nor} = II(\dot{c}(0), c(\dot{0}))$$

  Insbesondere haben alle nach Bogenlänge parametrisierten Kurven in S durch p mit demselben Tangentialvektor dieselbe Normalkrümmung.

Bezüglich Normalkrümmung

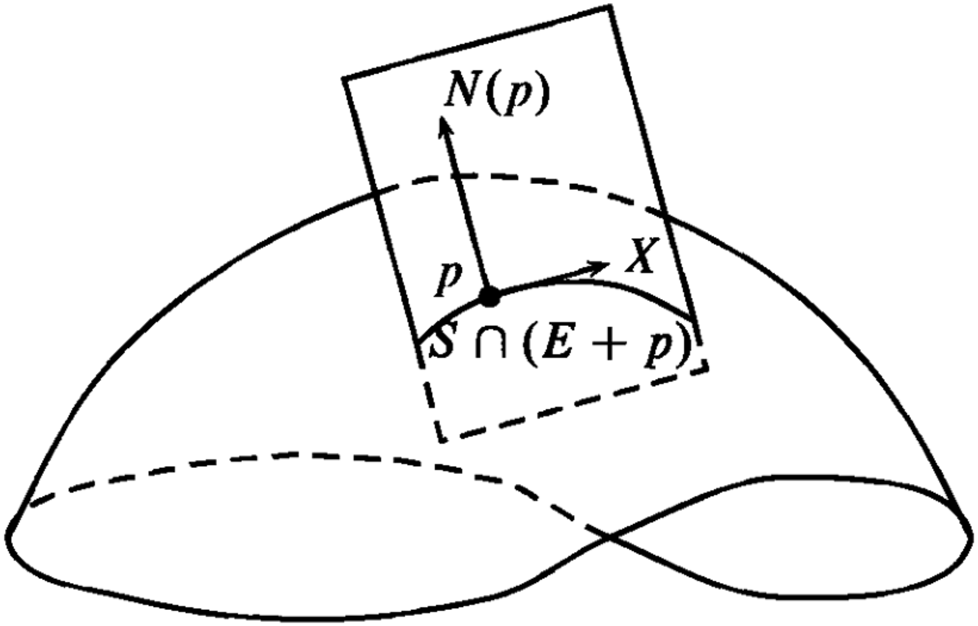

Abb. 89

Zusammenfassung

- Gauß-Abbildung (= Einheitsnormalenfeld)
  - $N\colon\ S \to S^2$
- Weingarten-Abbildung (= Differentiation davon)
  - $W_p(X) = -d_pN(X)$
- Die zweite Fundamentalform (= eine symm. Bilinearform, verknüpft mit der 1.FF)
  - $II_p(X,Y) = I_p\big(W_p(X),Y\big)$
- Krümmung (von Kurven zu Flächen)
  - $\kappa_{nor} = \langle \ddot{c}(0), N(p)\rangle$
- Satz von Meusnier (2.FF zur Berechnung der Krümmung von Flächen)
  - $\kappa_{nor} = II(\dot{c}(0), c(\dot{0}))$

Danke für die Aufmerksamkeit