2015-01-26 | 1

R. S. SEMLAK ANALYSIS / ANGEW. MATH

ELEMENTARE DIFFGEOMETRIE:

DIE GEOMETRIE VON KURVEN & FLÄCHEN

RÜCKBLICK & AUSBLICK

10 Reguläre Flächen: Eine Rückschau auf einer Seite

11 ABSTRAKTE MANNIGFALTIGKEITEN & RIEMANNSCHE GEOMETRIE

12 LORENTZ-GEOMETRIE & ALLG. RELATIVITÄTSTHEORIE

[0] REGULÄRE FLÄCHEN: EINE RÜCKSCHAU AUF EINER SEITE

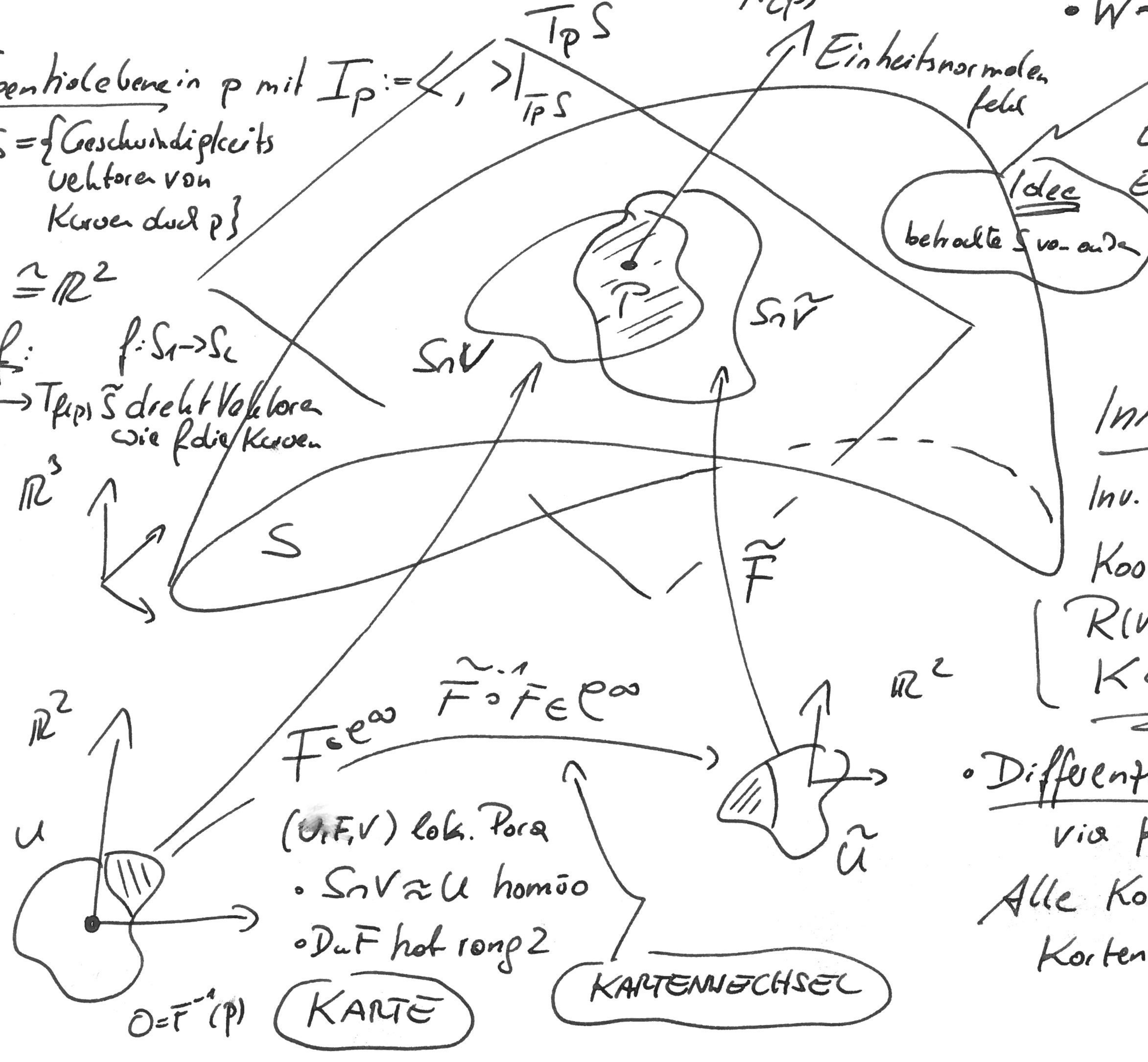
- Tangentialebene in p mit $I_p := \langle\, , \rangle|_{T_pS}$

  $T_pS = \{$Geschwindigkeitsvektoren von Kurven durch $p\}$

  $\cong \mathbb{R}^2$

- d_pf: $f: S_1 \to S_2$

  $T_pS \to T_{f(p)}\tilde{S}$ dreht Vektoren wie f die Kurven



$F \in C^\infty$ $\quad \tilde{F}^{-1} \circ F \in C^\infty$

(U, F, V) lok. Para

- $S \cap V \approx U$ homöo
- D_uF hat rang 2

KARTE

KARTENWECHSEL

Krümmung: (Wechsel des Gesichtspunkt)

- $W = -d_pN : T_pS \to T_pS$

  selbstadjungiert

  EW K_1, K_2 Hauptkrümmung

  EV X_1, X_2 Hauptkrümmungsrichtung

  $H = \frac{1}{2}\,\mathrm{spur}(W)$ mittlere $\Big\}$ K

  $K = \det(W)$ Gauß

Innere Geometrie

Inv. bzgl. Isom. $\left[\langle d_pf X, d_pf Y\rangle = \langle X, Y\rangle\right]$

Koo. Abl. = innere Ableitung

$\Big[$ $R(V,W)Z = (\nabla^2_{VW} - \nabla^2_{WV})Z$ RiemannT

$K \propto R$ TOR ZU EINEM „INNEREN TH"

- Differenzierbarkeit $f: S_1 \to \tilde{S}_2$

  via Karten

Alle Konzepte invariant bzgl. Kartenwechsel

2015-01-26 13

[1] Abstrakte MF & Riemann Geometrie

→ Th. Egregium & Umfeld legen nahe, dass der umgebende Raum $\mathbb{R}^3$ nicht nötig ist, um die Geometrie von Flächen zu studieren

[Ja, der umgebende Raum spiegelt sogar Eigenschaften vor, die die Fläche intrinsisch gar nicht hat...]

↳ **Abstrakte Mannigfaltigkeiten statt reg. Flächen**

↳ Zutaten:
- Eine Menge M
- Eine abzählbare Familie von Karten (genannt ATLAS)

  $\varphi : \underset{\text{offen}}{\mathbb{R}^n \supseteq U} \to \varphi(U) =: V \subseteq M$ bijektiv, sd

  – ganz M überdecken $[\forall p \in M \ \exists \text{ Karte}: p \in V]$

  – verträglich sind, d.h.

  $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : \mathbb{R}^n \supseteq \varphi^{-1}(V \cap \tilde{V}) \to \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n \quad C^\infty$

  – Punkte durch offene Mengen getrennt werden können: $\forall p \neq q,\ p \in V,\ q \in \tilde{V}\ \exists$ offene Mengen $W \subseteq U,\ \tilde{W} \subseteq \tilde{U} : p \in \varphi(W),\ q \in \tilde{\varphi}(\tilde{W}),\ \varphi(W) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{W}) = \emptyset$

2015-01-26/4

↳ Strukturen können jetzt von U bzw $\mathbb{R}^n$ auf $\varphi(U)$ bzw M transportiert werden; zB

offene Mengen: $W \subseteq M$ heißt offen, falls $\varphi^{-1}(W) \subseteq U$ offen

damit erhalten wir gratis, dass φ ein Homöomorphismus ist

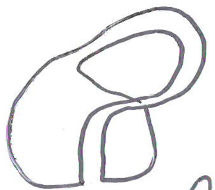
↳ DEF: (Differenzierbare Mf)

Eine n-dimensionale (abstrakte, C^∞-) Mf ist eine Menge M zusammen mit einem Atlas.

↳ Anschaulich: M schaut lokal um jeden Pkt so aus, wie der $\mathbb{R}^n$ – Warnung: global nicht

↳ BSP • reguläre Flächen sind 2-d Mf

• Kleinsche Flasche



2d-Mf
keine reg. Fläche
[Im $\mathbb{R}^n$ ohne Selbstd. darstellbar]

• SO(3) Drehgruppe

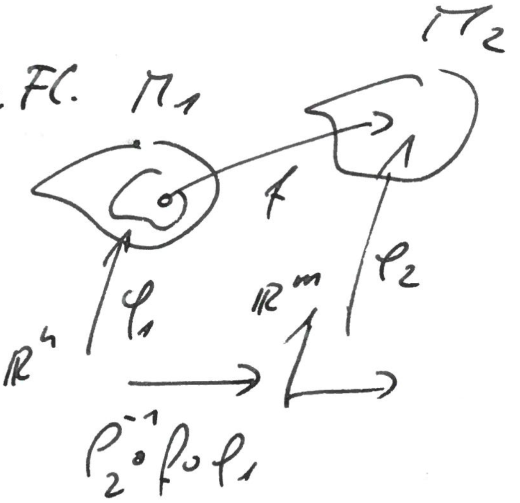
↳ Gruppe + Mf ⇝ LIEGRUPPEN

MF ist DER Grundbegriff der DIFFGEO

→ Differentialrechnung auf MF

2015-01-26 15

- glatte Abb, wörtlich wie auf reg. Fl.

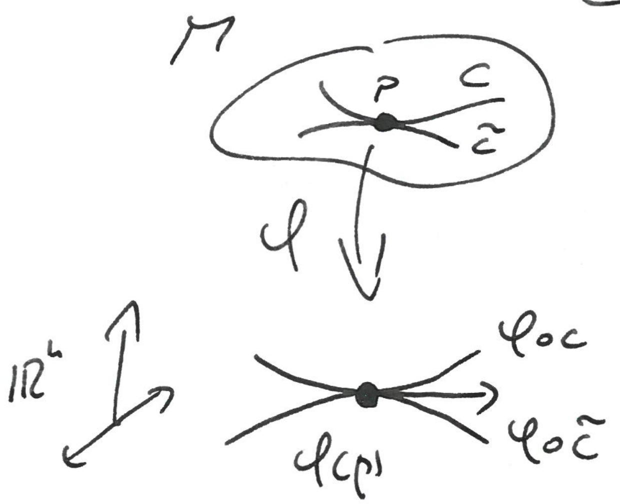


$$f: M_1 \to M_2 \in C^\infty$$
$$\iff \varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 \in C^\infty$$

$\forall$ Karten als Abb $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Tangentialraum, ähnlich wie für reg. Fl.

  – Ein Tangentialvektor X in $p \in M$ ist eine Äquivalenzklasse von param. Kurven $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ mit $c(0)=p$ wobei
  $$c \sim \tilde{c} :\iff (\varphi\circ c)^{\cdot}(0) = (\varphi\circ \tilde{c})^{\cdot}(0)$$



  – T_pM ist die Menge aller solcher ÄK

  – $T_pM \cong \mathbb{R}^n$

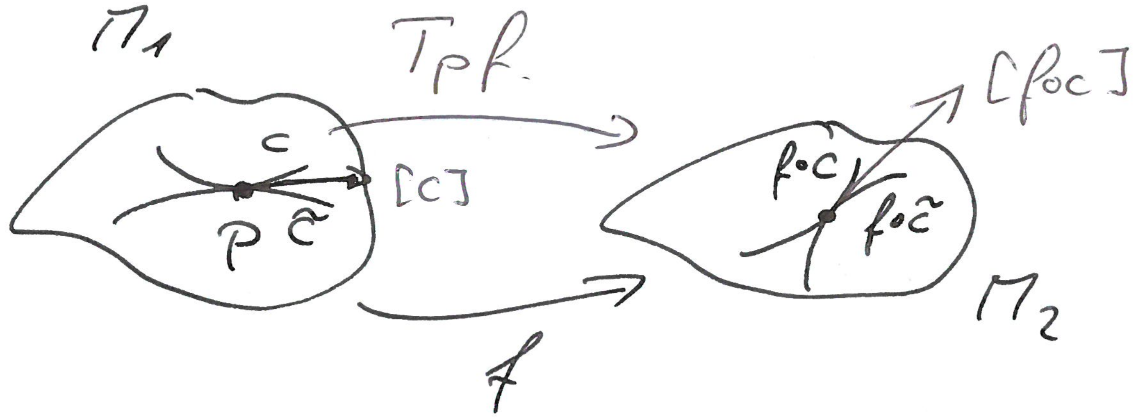
- Tangentialabbildung ($\hat{=}$ Ableitung in einem Pkt)

Klasse der Kurve c

$$T_pf \equiv d_pf : T_pM_1 \ni [c] \longmapsto [f\circ c] \in T_{f(p)}M_2$$

T_pf dreht die Vektoren, so wie f die Kurven

2015-01-26 | 6

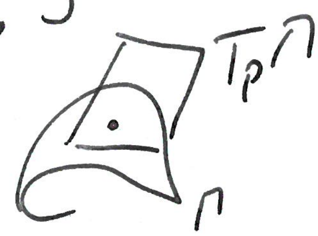


- lok. Darstellung mittels Jacobimatrix von

$$\varphi_2^{-1}\circ f\circ\varphi_1$$

⇝ Analysis auf MF / Globale Analysis

→ Geometrie auf T_pM ↳ Vorstellung wie bei reg. Fl.



- Wollen wieder Winkel & Längen definieren ⇝ brauchen Ersatz für I_p

- Eine Riemann-Metrik auf M ist eine Abb

$$g : M\ni p\mapsto \underbrace{g(p)}_{=g_p} : T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$$

sodass g_p ein Skalarprodukt auf T_pM

bilinear: $g_p(X+\alpha Y,Z)=g_p(X,Z)+\alpha g_p(Y,Z)$

symm: $g_p(X,Y)=g_p(Y,X)$

pos. def: $g_p(X,X)\geq 0$; $=0 \Leftrightarrow X=0$

↪ KRÜMMUNG (ganz ähnlich wie für die innere Geometrie reg. Fl.)

• **Christoffelsymbole**: $\Gamma_{ijk} := \frac{1}{2}\left(g_{ij,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}\right)$

Komp von g

$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$ in einer Karte

$$\boxed{\Gamma^i_{jk} = g^{il}\,\Gamma_{ljk}}$$

Einsteinsche Summenkonvention

• **kov. Ableitung** eines Vektorfeldes $X: M \ni p \mapsto X_p \in T_pM$ nach einem VF V

$$\boxed{\nabla_V X^i := V^j \frac{\partial X^i}{\partial u^j} + \Gamma^i_{jk} X^j V^k}$$

• **Riemanntensor**

$$R(V,W)Z = \nabla_V \nabla_W Z - \nabla_W \nabla_V Z + \nabla_{[V,W]} Z$$

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{kj,l} - \Gamma^i_{lj,k} + \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj}$$

$$\propto \Gamma^2 + \partial\Gamma \propto (\partial g)^2 + \partial^2 g$$

hat $C_n = \frac{1}{12} n^2(n^2-1)$ unabh. Komp.:

$n =$	2	3	4	5	6	7
$C_n =$	1	6	20	50	105	196

(2015-01-26)

→ **Geodäten** sind Kurven $\gamma : \underset{\subseteq \mathbb{R}}{I} \to M$

Sodass $\underline{\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0} \left[= \ddot\gamma^i + \Gamma^i_{jk} \dot\gamma^j \dot\gamma^k \right]$

$\dot\gamma$ ist längs γ konstant

γ hat keine Beschleunigung

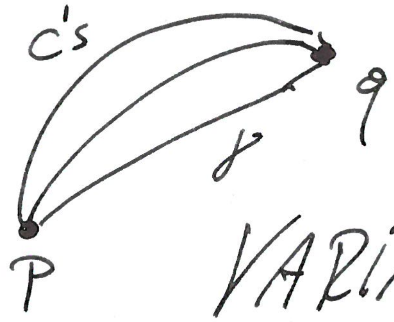
γ ist minimal gekrümmt

$\Longleftrightarrow$ γ minimiert lokal die Länge, d.h.

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt$$

ist minimal unter allen Kurven

c mit $c(a) = \gamma(a) = p$; $c(b) = \gamma(b) = q$



VARIATIONSRECHNUNG

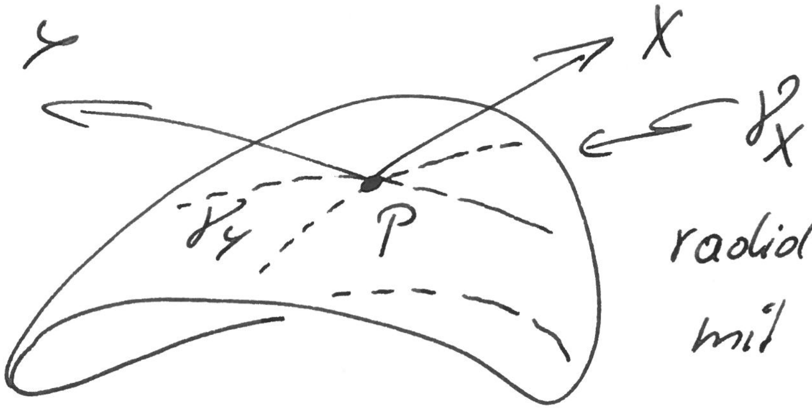
eine Art Extremwertaufgabe für das Längenfunktional am Raum aller Kurven

ODE-Theorie

$\Longrightarrow$ Gegeben $p \in M$, $X \in T_pM$

$\Longrightarrow \exists!$ Geodäte, die in p mit $\dot\gamma(p) = X$ startet

2015-01-26 | 9



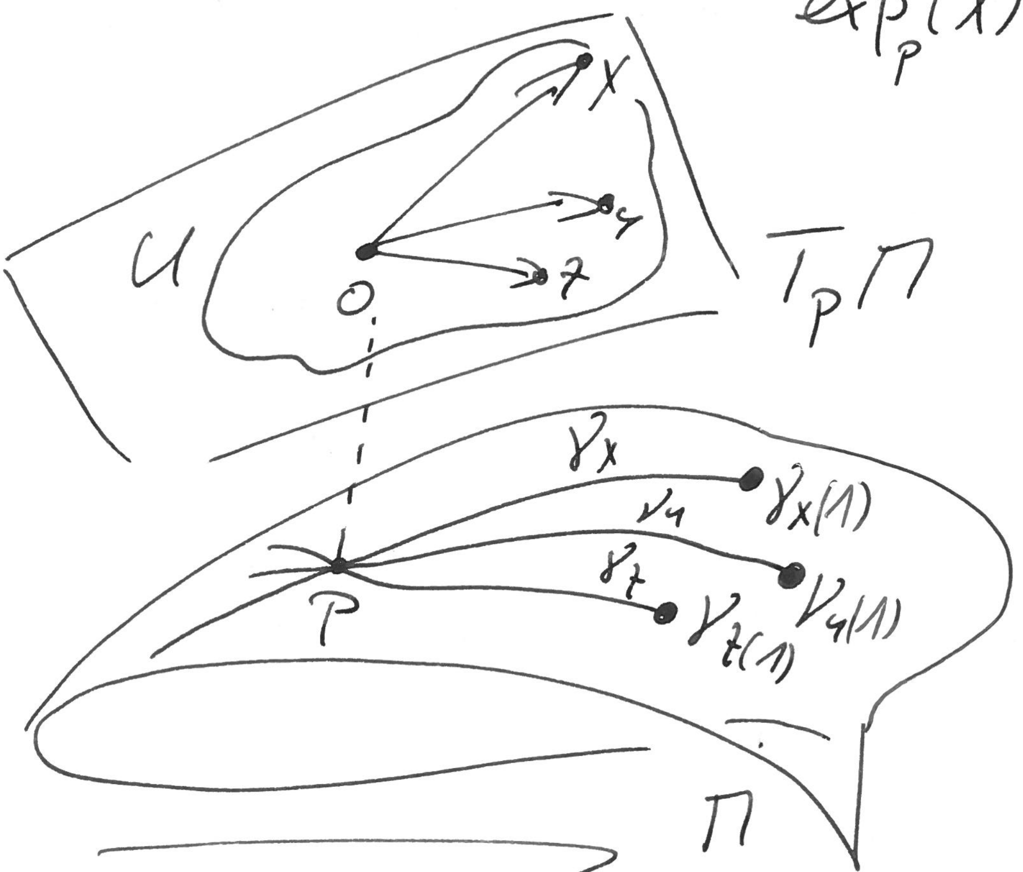
radiale Geod. in p mit Geschw X

↳ NORMALKOORDINATEN / EXPONENTIALABBILDUNG

- Geodäten liefern eine besonders tolle Karte

Defbereich ist hier eine Umgebung U von 0 in $T_pM \cong \mathbb{R}^4$

$$\exp_p(X) = \gamma_X(1)$$



→ RIEMANN GEOMETRIE

2015-01-26/10

3 Lorentzgeometrie & ART

→ funktioniert so wie R-Geo nur, dass $g(p)$ kein Skalarprodukt ist sondern nur mehr eine nichtentartete symm BLF

statt pos definit gilt nur: $g_p(X,Y)=0 \ \forall Y \Rightarrow X=0$

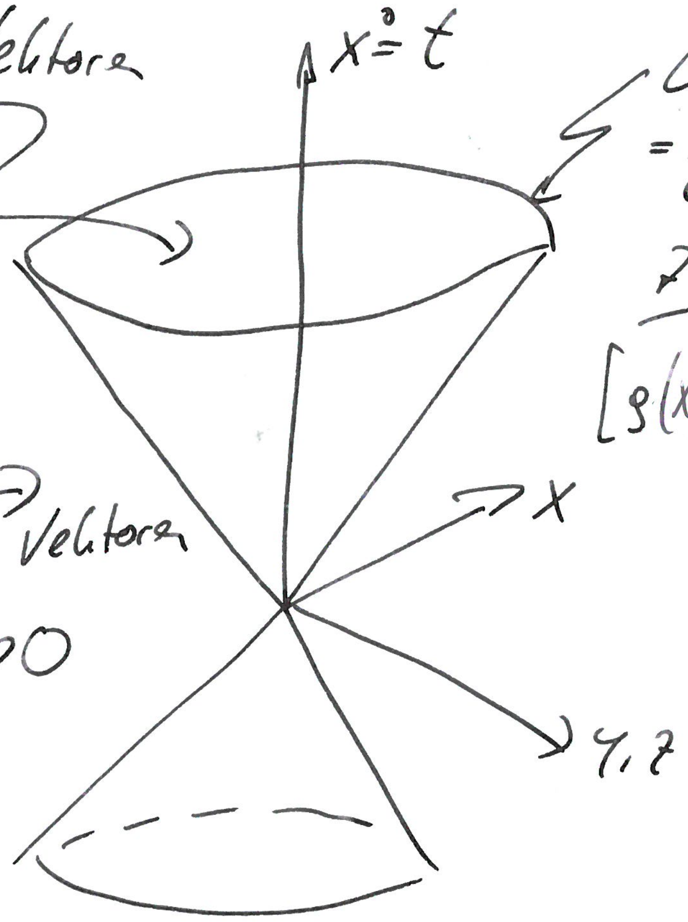
→ das ist tatsächlich schwächer als $g_p(X,X)\geq 0$, $=0 \Leftrightarrow X=0$

∃ Vektoren mit $g_p(X,X)=0$, $X\neq 0$

URBEISPIEL: DER MINKOWSKIRAUM $\left(\mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right)$

zeitartige Vektoren

$g(X,X)<0$



Lichtkegel C

$= \{X : g(X,X)=0\}$

zB: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left[g(X,X) = (1,1,0,0) \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,1,0,0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right]$

raumartige Vektoren

$g(X,X)>0$

2015-01-26 | 11

- Der MR ist die Bühne der SRT

→ Einstein 1905 [annus mirabilis]

$p \in M$ heißt Ereignis, $p = (t, x, y, z)$, $q = (t', x', y', z')$

dann ist der <u>raumzeitliche Abstand</u> von p & q

$$g\left(\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = -tt' + xx' + yy' + zz'$$

$= 0$ falls p, q auf einem Lichtstrahl liegen (Zeitdilatation)

Ψ: klass Mechanik + ED + konsequent umgesetzt, dass $c = v_{max}$ unabhängig vom Beob.

→ <u>ART</u>: Einsteins Th von Raum, Zeit & Materie

SRT + Gravitation

Einstein <u>1915</u>

→ 100 Jahre

ÖAW-Ausstellung 1.10-6.11.

<u>Idee</u>: Gravitation wirkt universell; daher als Eigenschaft des Raumes beschreibbar — und zwar als Krümmung

– Φ: T_{ij} … Energie-Impuls Tensor

$E=mc^2$

beschreibt alle Energie, Masse, Kräfte (Mech + ED) in einer (4×4)-Matrix

- $T_{ij} = T_{ji}$ symm, $T^i{}_i = 0$ spurfrei
- $\operatorname{div} T = \nabla^i T_{ij} = 0$ Energieerhaltung

– Geometrie

$R_{ij} := R^l{}_{ilj}$ … Ricci-Tensor

erfüllt $R_{ij} = R_{ji}$, $\nabla^i R_{ij} = 0$

$G_{ij} := R_{ij} - g_{ij} R^l{}_l$ … Einstein-Tensor

zusätzlich spurfrei

Krümmung

Einstein Gleichung: $\boxed{G_{ij} = 8\pi T_{ij}}$ Materie in der RT

zu lesen als $G_{ij}(g) \propto (\partial g)^2 + \partial^2 g$

10 gekoppelte quasilineare PDE 2. Ordnung für g