1.24 BEM (Riemannsummen)

In dieser Bemerkung diskutieren wir einen wichtigen alternativen Zugang zum R-Integral, der eine etwas einfachere Berechnung des R-Integrals erlaubt [die Methode Integrale zu berechnen folgt im nächsten §] und oft auch als Definition verwendet wird.

Wir beginnen mit einer (technischen) Definition

(i) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und sei $Z := \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$.
Wir wählen in jedem der Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ einen Punkt $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, genannt Stützstelle.

Teilungspunkte t_j $(0 \le j \le n)$ und Stützstellen ξ_j $(1 \le j \le n)$ fassen wir zusammen zu

[Fraktur Z] $\longrightarrow$ $$\boxed{\mathfrak{Z} := \left((t_k)_{k=0}^{n}, (\xi_k)_{k=1}^{n} \right)}$$

und definieren die Riemann-Summe von f bzgl $\mathfrak{Z}$ als

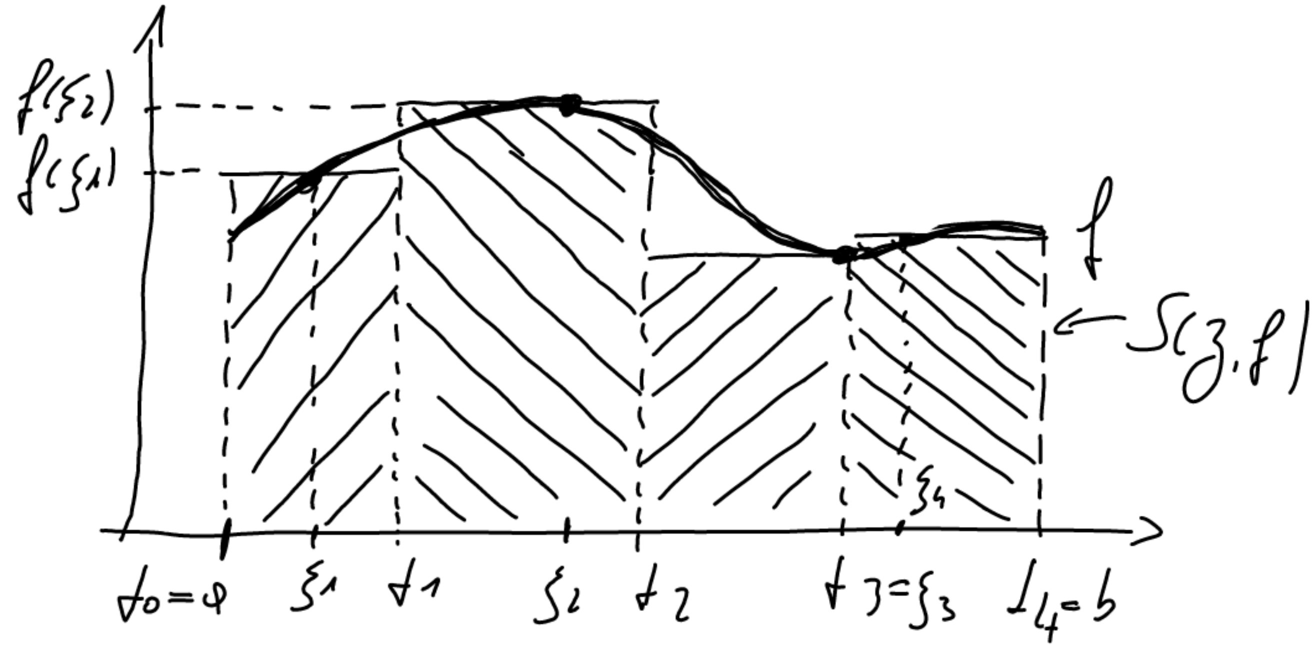
$$\boxed{S(\mathfrak{Z}, f) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})}$$

Rechtecksflächen mit Breite = Abstand der resp. Teilungspkte und Höhe = f an der entspr. Stützstelle

Wir nennen $\mu(Z) = \max_{1 \le k \le n} (t_k - t_{k-1})$ ← Länge des größten Teilintervalls

die Feinheit der Zerlegung Z

(ii) Wir können diese Def graphisch veranschaulichen:



Wir sehen, dass die R-Summe als Fläche unter dem Graphen einer Treppenfkt φ interpretiert werden kann, wobei

$$\varphi(t) = f(\xi_i) \quad t \in (t_{i-1}, t_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und daher genauer

$$\boxed{\int_a^b \varphi(t)\,dt = R(Z, f)}$$

φ interpoliert also f an den Stützstellen $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Riemanns ursprüngliche Idee war es nun, den Grenzwert von $R(Z,f)$ für $\mu(Z) \to 0$ zu betrachten, also für immer feinere Zerlegungen bessere Approximationen durch an den Stützstellen interpolierende

Treppenfkt zu konstruieren.

Dieser Zugang ist unserem eng verwandt. Lediglich die Bestimmung der approximierenden Treppenfkt ist etwas expliziter.

Da es im Limes $\mu(\mathcal{Z}) \to 0$ anschaulich die Wahl der Stützstellen irrelevant wird, ist es nicht überraschend, dass beide Zugänge äquivalent sind. Genau gilt

(iii) THM: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt

f ist R-intbar $\iff$ $\exists s \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sodass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $\mu(\mathcal{Z}) < \delta$

$$|S(\mathcal{Z}, f) - s| < \varepsilon$$

Die R-Summen kommen s beliebig nahe, falls die Zerlegung nur fein genug ist.

In diesem Fall gilt $s = \int_a^b f(t)\,dt$

Beweis siehe [Hö, 9.13] $\square$

(iv) BSP. Wir berechnen exemplarisch das Integral $\int_0^a t\,dt$ $(a > 0)$ mittels R-Summen.

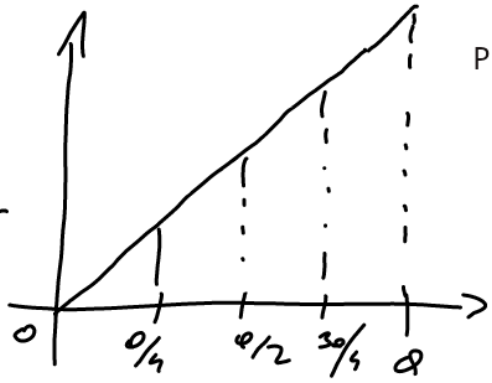
Sei $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Wir wählen als Zerlegungspkte $t_k := \frac{ka}{n}$ $(k = 0, \dots, n)$ und Stützstellen $\xi_k = t_k$. Dann ist also

Das ist erlaubt, vgl. (i) & es ist einfach!

$$\mathcal{Z} = \left((t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n \right) = \left(\left(\frac{ka}{n}\right)_{k=0}^n, \left(\frac{ka}{n}\right)_{k=1}^n \right)$$

und $\mu(\mathfrak{Z}) = \frac{a}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Also ergeben sich die R-Summen



$$S_n = S(\mathfrak{Z}, f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{ka}{n} \cdot \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \underline{\frac{a^2}{n^2} \, \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{a^2}{2}$$

und somit
$$\boxed{\int_0^a t \, dt = \frac{a^2}{2}}$$

Dieses Ergebnis sieht man natürlich auch elementargeometrisch; richtig Integrale berechnen lernen wir im nächsten §.