

Blatt 9: Winkelfunktionen¹

1 *Grundeigenschaften der Winkelfunktionen.*

Diese Aufgabe dient zur Wiederholung und Festigung wichtiger Aussagen aus der Vorlesung.

- (a) Wie lautet die Eulersche Formel? Beweise sie!
- (b) Beweise $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
- (c) Zeige $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$
- (d) Formuliere und beweise die Additionstheoreme.
- (e) Definiere die Zahl π .

2 *Weitere Eigenschaften der Winkelfunktionen.*

Zeige die folgenden Formeln:

- (a) (Doppelwinkelformeln) $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$
 $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$
- (b) (Halbwinkelformeln) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}} \quad (x \in [0, 2\pi])$
 $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}} \quad (x \in [-\pi, \pi])$
 $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} \quad (x \in (-\pi, \pi))$
- (c) (Produktformeln) $2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y)$
 $2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x - y) + \cos(x + y)$
 $2 \sin(x) \cos(y) = \sin(x - y) + \sin(x + y)$

3 *Rationale Darstellung der Winkelfunktionen.*

Sei $\alpha \in (-\pi, \pi)$. Zeige:

- (a) Für $\alpha \neq 0$ gilt $\frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
- (b) $\forall t \exists! \alpha \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $t = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

¹Diese Aufgaben beziehen sich noch auf den Stoff der „Einführung in die Analysis“ Kapitel **2** §3 vom Sommersemester 2012. Die Vorlesungsausarbeitung dazu befindet sich auf der Materialenseite <http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem12/EidA.html>.

(c) Es gelten die Formeln $\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(\alpha) = \frac{2t}{1+t^2}$

Bemerkung. Mit den Formeln aus (c) erhalten wir

$$\{(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) : -\pi < \alpha < \pi\} = \left\{ \frac{(1-t^2, 2t)}{1+t^2} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

was eine Parametrisierung des Einheitskreises mittels rationaler Funktionen ergibt. Deshalb sind diese Formeln fixer Bestandteil der Trickkiste „Intergrationstechniken“.

4 *Periodizität des Cosinus—von hinten aufgezäumt.*

Verwende ausschließlich(!) die Additionstheoreme, die Positivität von $\sin(x)$ auf $(0, 2]$, die Definition von π und Eulersche Formel aus der Vorlesung um zu zeigen, dass \cos eine 2π -periodische Funktion ist, d.h.

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

5 *Werte der Winkelfunktionen.*

Berechne (natürlich **ohne** Taschenrechner) die exakten Werte von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ für

(a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ *Tipp:* $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$ oder verwende die Halbwinkelformeln.

(b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ *Tipp:* Setze $z = e^{i\pi/3}$ und verwende $z^3 + 1 = 0$.

(c) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ *Tipp:* Verwende (b) und Vo. 2 Kor. 3.23.

6 *Winkeldreiteilung.*

Zeige die Formel

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x).$$

Tipp: Verwende Aufgabe 1 (c).

Bemerkung. Mit $\alpha = 3x$ wird aus obiger Formel $4 \cos^3(\alpha/3) - 3 \cos(\alpha/3) = \cos(\alpha)$, sodass die Dreiteilung des Winkels α äquivalent zum Lösen der Gleichung $3 \cos^3(\alpha/3) - \cos(\alpha) = 0$ ist. Durch Betrachten dieser Gleichung kann man zeigen, dass ein allgemeiner Winkel α **nicht** mittels Zirkel und Lineal dreigeteilt werden kann. Aber das ist eine Geschichte der Algebra...

7 *Oszillation.*

Gegeben sind die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

(a) $f_1(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (b) $f_2(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (c) $f_3(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Skizziere die Graphen von f_i ($i = 1, 2, 3$) und berechne $\lim_{x \rightarrow 0} f_i$.