Blatt 8: Elementar-transzendente Funktionen[1]

$\boxed{1}$ *Nochmals: Umkehrfunktion und Stetigkeit.*
In der Vorlesung wurde die folgende Variante (vgl. $\boxed{2}$ Bem. 2.20) des Unkehrsatzes $\boxed{2}$ Thm. 2.18 besprochen.

(2.20) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Dann bildet f das Intervall I bijektiv auf die Menge $f(I)$ ab und die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(I) \to I$ ist stetig und streng monoton wachsend.

Folgende Behauptung (wäre zwar schön) ist aber falsch:

(Quatsch) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to f(I)$ streng monoton wachsend. Dann ist f stetig.

Deine Aufgabe ist nun Folgendes:

(a) Gib ein explizites Gegenbeispiel zu obiger Behauptung (Quatsch) an.

(b) Finde den Fehler im folgenden „Beweis":
$f: I \to f(I)$ ist streng monoton wachsend, I ein Intervall. Aus (2.20) folgt, dass die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(I) \to I$ stetig und streng monoton wachsend ist. Daher können wir (2.20) auf $f^{-1}: f(I) \to I$ anwenden und erhalten $f = (f^{-1})^{-1}: I \to f(I)$ ist stetig. $\square$

$\boxed{2}$ *Eigenschaften der allgemeinen Exponentialfunktion.*
Wiederhole die Definition der allgemeinen Exponentialfunktion $\exp_a(x) = x^a$ ($0 < a \in \mathbb{R}$) aus $\boxed{2}$ Def. 3.5(iii) und beweise die folgenden in $\boxed{2}$ Prop. 3.7 behaupteten Eigenschaften.

Hinweis: Verwende die entsprechenden Eigenschaften von exp und log aus der Vorlesung. Gehe dabei sorgfältig vor und verwende keine (im Rahmen der Vo.) unbewiesenen Formeln (auch wenn du sie vielleicht aus der Schule kennst)!

(a) (Funktionalgleichung) $a^{x+y} = a^x\, a^y \quad (x, y \in \mathbb{R})$

(b) (Konsistenz mit natürlichen Exponenten) $\exp_a(m) = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{-mal}} \quad (m \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

(c) (Konsistenz mit rationalen Exponenten) $\exp_a\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{a^p} \quad (p \in \mathbb{Z}\ 1 \leq q \in \mathbb{N})$

(d) (Doppeltes Exponential) $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x \quad (x, y \in \mathbb{R})$

[1]Diese Aufgaben beziehen sich noch auf den Stoff der „Einführung in die Analysis" Kapitel $\boxed{2}$ §2–3 vom Sommersemester 2012. Die Vorlesungsausarbeitung dazu befindet sich auf der Materialienseite `http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem12/EidA.html`.

Roland Steinbauer, September 2012

(e) (Multiplikation der Basen) $\exp_a(x)\exp_b(x) = \exp_{ab}(x) \quad (0 < b \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R})$

(f) (Quotienten) $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$

$\boxed{3}$ *Noch eine Anwendung des Umkehrsatzes: Der Logarithmus zur Basis a.*
Für $a > 1$ betrachte nochmals die Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \to (0,\infty), \quad x \mapsto a^x.$$

(a) Skizziere den Graphen von f_a und zeige (wieder unter Zuhilfenahme der entsprechenden Eigenschaften von exp und log aus der Vorlesung), dass f_a stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist.

(b) Ernte (soll heißen folgere) aus (i), dass die Umkehrfunktion von f_a

$$^a\log := (f_a)^{-1} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

stetig und streng monoton wachsend ist. Skizziere den Graphen von $^a\log$.

(c) Zeige folgende Formel

$$^a\log(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \qquad (x \in (0,\infty)),$$

die $^a\log$ auf den natürlichen Logarithmus log zurückführt (und die dir eventuell noch aus der Schule vertraut ist).

$\boxed{4}$ *Explizite Grenzwerte.*
Berechne folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - x}{|x|}$　　(b) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$　　(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

Hinweis: Den Grenzwert in (c) haben wir schon in Aufgabe $\boxed{7}$ (b) auf Blatt 3 (etwas mühsam) berechnet. Insofern ist das Ergebnis bekannt. Hier kannst du (c) aus (b) folgern, was wesentlich kürzer ist!

$\boxed{5}$ *Konvergenz in $\mathbb{C}$.*
Wiederhole das wichtigste zur Konvergenz in $\mathbb{C}$ aus Vo. $\boxed{2}$ 3.10(D,E) („Nichts Neues aber doppelt so viel Arbeit"). Dann beweise folgende *Grenzwertsätze* aus Vo. $\boxed{2}$ 3.10(G): Seien $(c_n)_n$ und $(d_n)_n$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ dann gilt

(a) $\lim(c_n + d_n) = \lim c_n + \lim d_n$　　(b) $\lim(c_n d_n) = \lim c_n \ \lim d_n$.

$\boxed{6}$ *Komplexe Reihen.*
Sind die folgenden Reihen (absolut) konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) + \frac{i}{n}$　　(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n \ (z \in \mathbb{C})$　　*Tipp:* Fallunterscheidung für $|z|$

Roland Steinbauer, September 2012