Blatt 7: Stetigkeit & Grenzwerte von Funktionen[1]

$\boxed{1}$ *Grenzwerte explizit.*
Untersuche, ob die Grenzwerte existieren und wenn ja, berechne sie!

(a) $\lim\limits_{x \searrow 1} \dfrac{1+x}{1-x}$ (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 - 5x^2 - 1}{1 - x^3}$ (c) $\lim\limits_{x \to \infty} \exp\left(\dfrac{x^2 - 131x - 97}{(x+17)(x+1)}\right)$

$\boxed{2}$ *Stetigkeit vs. gleichmäßige Stetigkeit.*
Betrachte die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

(a) Zeige direkt aus der ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass f stetig (in jedem Punkt $x_0 \in (0, \infty)$) ist.

(b) Ist f auch gleichmäßig stetig? Warum?

(c) Ist die Einschränkung von f auf $[1, \infty)$ gleichmäßig stetig? Warum?

$\boxed{2A}$ *Freiwillige Zusatzaufgabe: Es liegt nicht an der Unbeschränktheit.*
Finde eine Funktion $f :\ (0, 1] \to \mathbb{R}$, die die stetig und (im Gegensatz zu $f(x) = 1/x^2$ in Aufgabe $\boxed{2}$) *beschränkt* aber nicht gleichmäßig stetig ist.
Tipp: Zacken wie in Vo. $\boxed{2}$ 1.15(i).

$\boxed{3}$ *Einseitige Grenzwerte & Stetigkeit.*
Sei $c \in (a, b)$, sei $f : (a, b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Beweise, dass

$$\lim_{x \searrow c} f(x) = \alpha = \lim_{x \nearrow c} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to c} f(x) = \alpha$$

gilt. (Insbesondere existiert der Limes.)

$\boxed{4}$ *Stetige Fortsetzbarkeit.*
Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Zeige, dass f nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.
Hinweis: Mache dir zuerst klar, was die Aussage genau bedeutet (vgl. Vo. $\boxed{2}$ Bem. 1.27).

[1]Diese Aufgaben beziehen sich noch auf den Stoff der „Einführung in die Analysis" Kapitel $\boxed{2}$ §2 vom Sommersemester 2012. Die Vorlesungsausarbeitung dazu befindet sich auf der Materialienseite `http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem12/EidA.html`.

Roland Steinbauer, September 2012

$\boxed{5}$ *Unerwartetes Stetigkeitsverhalten—Monster.*
Betrachte die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x):=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{falls } x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q} \text{ mit minimalem } q\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

und führe das (in der Vorlesung nicht vorgetragene) Bsp. $\boxed{2}$ 1.15(ii) aus, indem du zeigst, dass

(a) f unstetig in allen $q\in\mathbb{Q}$ ist, aber

(b) f stetig in allen $r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist.

$\boxed{6}$ *Fixpunktsatz.*
Ziel dieser Aufgabe ist es, den folgenden (sogenannten) Fixpunktsatz zu verstehen und zu beweisen:

Satz. Sei $f:[0,1]\to[0,1]$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f einen Fixpunkt d.h. es existiert ein $x_0\in[0,1]$ mit

$$f(x_0)=x_0.$$

(a) Veranschauliche die Aussage am Einheitsquadrat.
Hinweis: Der Graph von f liegt zur Gänze im Einheitsquadrat $[0,1]\times[0,1]$, beginnt an dessen linker Kante und endet an dessen rechter Kante. Weiters liegen Fixpunkte auf der Diagonale...

(b) Beweise die Aussage.
Hinweis: Ein Fixpunkt von f ist eine Nullstelle der Funktion g mit $g(x):=f(x)-x$.

(c) Freiwillige Zusatzaufgabe: Mutmaße, wozu Fixpunktsätze gut sein könnten.

$\boxed{7}$ *Unstetige Inverse.*
Wir betrachten die Funktion

$$f:\ D=[-2,-1)\cup[1,2]\to\mathbb{R},\quad f(x):=\begin{cases}x+1 & \text{für } x\in[-2,-1)\\ x-1 & \text{für } x\in[1,2].\end{cases}$$

(a) Zeige, dass f als Abbildung $D\to[-1,1]$ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv ist.

(b) Nach (a) hat f eine Umkehrfunktion $f^{-1}:\ [-1,1]\to D$. Berechne diese explizit (Tipp: Skizze!) und begründe, warum f^{-1} in $x_0=0$ nicht stetig ist.

(c) Was ist die Moral der Geschichte?

Roland Steinbauer, September 2012