Blatt 17: Integrieren

$\boxed{1}$ *Grundintegrale.*
Bestimme (ohne auf die jeweiligen Gültigkeitsbereiche Rücksicht zu nehmen)

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(x)}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2(x)}$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $\displaystyle\int \cosh(x)dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2(x)}$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sinh^2(x)}$

$\boxed{2}$ *Stammfunktion von* $1/x$*.*
In Vo. $\boxed{4}$ Bsp. 2.11(ii) haben wir für $a, b > 0$ gesehen, dass $\int_a^b \frac{dx}{x} = \log(x)\,|_a^b$ gilt. In vielen Formelsammlungen findet man allerdings

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| \quad (x \neq 0).$$

Versuche diesen Umstand zu klären.
Tipp: Betrachte analog zur Vorlesung den Fall $a, b < 0$.

$\boxed{3}$ *Partielle Integration, explizit.*
Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^2 x\log(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^2 x^2\log(x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(x)\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x\,dx$ (f) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$

$\boxed{4}$ *Eindeutigkeit von Stammfunktionen* (Ein Da Capo zur UE Schulmathematik 6).
Mittels partieller Integration berechnen wir

$$\int \frac{dx}{x\log(x)} = \left[\frac{1}{\log(x)}\ \log(x)\right] - \int -\frac{\log(x)dx}{x\log^2(x)} = 1 + \int \frac{dx}{x\log(x)}.$$

Impliziert das $0 = 1$? Warum, Warum nicht? Ist die partielle Integration nicht korrekt ausgeführt oder darf hier überhaupt partiell integriert werden?
Tipp: Wie sieht es mit $\int_a^b \frac{dx}{x\log(x)}$ aus?

Roland Steinbauer, Jänner 2013

$\boxed{5}$ *Substitutionsregel, explizit.*
Berechne mittels Substitutionsmethode:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x\log(x)}$

Tipp: Setze $x = t + \pi$. *Tipp:* Setze $x = t + \pi/2$. *Tipp:* Setze $u = \log(x)$.

$\boxed{6}$ *„Umkehrung" der logarithmischen Ableitung.*

(a) Beweise die folgende Aussage: Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt (Schreibweise wie in $\boxed{2}$)

$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx \;=\; \log|\varphi(x)|\;\Big|_a^b$$

(b) Berechne $\displaystyle\int_a^b \tan(x)dx$ für $[a,b] \subseteq (-\pi/2, \pi/2)$.

$\boxed{7}$ *Integrale der Arcusfunktionen.*
Berechne die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int \arctan(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \arcsin(x)\,dx$

Tipp: Beginne mit demselben Trick wie bei der Berechnung von $\int \log(x)dx$ in Vo. $\boxed{4}$ Bsp. 2.14(ii), dann verwende $\boxed{6}$ bzw. substituiere geeignet.

$\boxed{8}$ *Explizite Integrale.*
Bestimme:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ *Tipp:* Setze $x = 2\tan(z)$.

$\boxed{9}$ *Uneigentliche Integrale.*
Überprüfe die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls ihren Wert:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2-2x}}$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^t}{t}\,dt$

$\boxed{10}$ *Integraltest für Reihen.*
Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^s}$?

Roland Steinbauer, Jänner 2013