Blatt 16: Das Riemann-Integral

$\boxed{1}$ *Treppenfunktionen explizit.*

(a) Gib auf $[0,1]$ zwei Treppenfunktionen an und zwei unstetige Funktionen, die keine Treppenfunktionen sind.

(b) Betracht die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Gib explizit Treppenfunktionen $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ an, sodass

$$\psi_1 < \psi_2 \le f \le \varphi_2 < \varphi_1.$$

(c) Laut Vo. $\boxed{4}$ Thm. 1.11 gibt es ja Treppenfunktionen φ, ψ auf $[0,1]$ mit $\psi \le f \le \varphi$ und $\int_0^1 \varphi(t)\,dt - \int_0^1 \psi(t)\,dt \le \frac{5}{16}$. Finde explizit ein solches Paar ψ, φ.

$\boxed{2}$ *Summe von Treppenfunktionen.*
Führe den Beweis von Vo. $\boxed{4}$ Lemma 1.3(ii) im Detail aus, d.h. beweise, dass die Summe zweier Treppenfunktionen auf $[a,b]$ wieder eine Treppenfunktion ist.

$\boxed{3}$ *Positiver und negativer Teil.*

(a) Wiederhole die Definitionen von f^+, f_- und veranschauliche sie in einer Skizze.

(b) Weise die folgenden Formeln aus Vo. $\boxed{4}$ Bem. 1.18(ii) nach:

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_- = -\min(f(x), 0), \quad f = f^+ - f_-, \quad |f| = f^+ + f_-$$

(c) Beweise (ebenfalls Vo. $\boxed{4}$ Bem. 1.18(ii)): $f \le g \implies f^+ \le g^+ \quad \text{und} \quad g_- \le f_-$ und fertige eine Skizze an.

$\boxed{4}$ *Der Mittelwertsatz der Integralrechnung als Werkzeug.*
Verwende den Mittelwertsatz der Integralrechnung, um die folgenden Integrale nach oben abzuschätzen (vgl. Vo. $\boxed{4}$, 1.21(ii)):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx, \quad \int\limits_0^1 4x^2 + 7\,dx, \quad \int\limits_{-1}^{1} x\sin(1/x)^*\,dx, \quad \int\limits_0^L \arctan(x)\,dx \ (L > 0)$$

$\boxed{5}$ *Endlich viele Unstetigkeitsstellen stören die Integrierbarkeit nicht.*
Beweise die folgende Aussage: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und in höchstens einem Punkt $\xi \in [a,b]$ unstetig, dann ist f Riemann-integrierbar.

*Hier ist natürlich die stetige Fortsetzung von $x\sin(1/x)$ durch 0 in $x = 0$ gemeint, vgl. Blatt 9 $\boxed{7}$(b).

Roland Steinbauer, Jänner 2013

Anleitung: Baue deinen Beweis auf dem Integrabilitätskriterium $\boxed{4}$ Thm. 1.11 aus der Vorlesung auf. Dabei zerlege $[a,b]$ in die drei Teile $I_1 = [a, \xi - \delta]$, $I_2 = [\xi - \delta, \xi + \delta]$ und $I_3 = [\xi + \delta, b]$. Auf I_1 und I_3 ist f stetig, daher Riemann-integrierbar und wegen Thm. 1.11 gibt es gibt $\psi_k \leq f \leq \varphi_k$ auf I_k $(k = 1, 3)$ mit $\int_{I_k}(\varphi_k - \psi_k) \leq \varepsilon/3$. Um die Integrierbarkeit auch auf dem problematischen Intervall I_2 (sprich auf der δ-Umgebung der Unstetigkeitsstelle ξ) in den Griff zu bekommen, definiere Treppenfunktionen ψ, φ auf $[a,b]$ durch eine Zusammensetzung von ψ_k auf I_k $(k = 2, 3)$ mit $\psi(x) = -M$ $(x \in I_2)$, d.h.

$$\psi(x) := \begin{cases} \psi_1(x) & x \in I_1 \\ -M & x \in I_2 \\ \psi_3(x) & x \in I_3 \end{cases}$$

und analog mit $+M$ für φ. Dabei ist M eine Schranke für f $(|f| \leq M)$. Wenn du nun δ klein genug wählst $(4\delta M < \varepsilon/3)$ ergibt sich $\int_a^b(\varphi - \psi) < \varepsilon$ und die Rückrichtung von Thm. 1.11 erledigt den Rest...

Anmerkung: Aus der eben bewiesenen Aussage ergibt sich dann (durch Zerlegen von $[a,b]$ in endlich viele Teilintervalle mit jeweils einer Unstetigkeitsstelle) die in der Überschrift angedeutete Aussage: Eine beschränkte Funktion f auf $[a,b]$ mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen ist Riemann-integrierbar.

$\boxed{6}$ *Nicht-verschwindendes Integral stetiger Funktionen.*
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion aber nicht die Nullfunktion. Zeige, dass dann $\int_a^b |f(t)|\, dt \not> 0$ gilt. Fertige eine Skizze an!
Hinweis. Verwende Vo. $\boxed{2}$ Lemma 1.10, das besagt, dass eine stetige Funktion f, die in einem Punkt ξ nicht verschwindet, schon auf einer ganzen Umgebung $U_\delta(\xi) = (\xi - \delta, \xi + \delta)$ nicht verschwindet. Genauer kann man – wie der Beweis von $\boxed{2}$ 1.10. zeigt – erreichen, dass $|f(x)| > |f(\xi)|/2 > 0$ auf $U_\delta(\xi)$.

$\boxed{7}$ *Verschwindendes Integral.*
Gib explizit eine Riemann-integrierbare Funktion $f \geq 0$ aber $f \not\equiv 0$ auf $[0,1]$ mit $\int_0^1 f(t)\, dt = 0$ an.
Tipp: Wegen $\boxed{6}$ muss f unstetig sein. Lass dich von Aufgabe $\boxed{5}$ inspirieren!

$\boxed{8}$ *Riemannsummen explizit.*
Berechne mittels Riemannsummen

$$\int_0^a t^2\, dt \qquad (a > 0).$$

Tipp: Orientiere dich an Vo. $\boxed{4}$ Bem. 1.24(iv) und wähle eine äquidistante Zerlegung. Falls dir unterwegs $\sum_{k=1}^n k^2$ begegnet, erinnere dich, dass dies ein Standardbeispiel für Induktionsbeweise ist und sich die Lösung daher leicht in der Literatur/im Internet finden lässt.

Roland Steinbauer, Jänner 2013