Blatt 11: Differenzierbarkeit und Ableitung, Teil 2

$\boxed{1}$ *Differenzierbarkeit 3.*
Für welche x sind die folgenden Funktionen definiert, für welche x sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Berechne gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$ (b) $f_2(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 3 + 5x$

(c) $f_3(x) = x \log(x) - x$ (d) $f_4(x) = e^{2x+3}$

(e) $f_5(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$ (f) $f_6(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$

$\boxed{2}$ *Ableitung von Linearkombinationen.*
Beweise $\boxed{3}$ Prop. 1.15(i) aus der Vorlesung. Genauer, seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in I$ und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist $\lambda f + \mu g$ differenzierbar in ξ und es gilt

$$(\lambda f + \mu g)'(\xi) = \lambda f'(\xi) + \mu g'(\xi).$$

$\boxed{3}$ *Ableitung der Hyperbelfunktionen.*
Wiederhole die Definition der Hyperbelfunktionen aus Vo. $\boxed{2}$ 1.19(ii) und berechne die Ableitungen von

(a) $\sinh(x)$ (b) $\cosh(x)$ (c) $\tanh(x) := \sinh(x)/\cosh(x)$

(d) Vergleiche deine Ergebnisse mit den Ableitungen der Winkelfunktionen sin, cos und tan. Was fällt dir auf?

$\boxed{4}$ *Die Tangente als „beste" Gerade—warum $\frac{r(h)}{h} \to 0$?*
Ziel dieser Aufgabe ist es (noch einmal und explizit) zu sehen, in welchem präzisen Sinne die Tangente die bestapproximierende Gerade an eine differenzierbare Funktion ist und was das mit der besonderen Eigenschaft des „Fehlers" $\frac{r(h)}{h} \to 0$ aus Vo. $\boxed{3}$ Thm. 1.19 zu tun hat, vgl. auch Bem. 1.20.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und sei $\xi \in \mathbb{R}$. Zeige bzw. bearbeite nacheinander die folgenden Punkte:

(a) Jede Gerade g durch $(\xi, f(\xi))$ ist von der Form $g(x) = f(\xi) + \alpha(x - \xi)$.

(b) Gib den Fehler $r(h) = f(\xi + h) - g(\xi + h)$ der Approximation von f durch die Gerade g explizit in Termen von f und α an.

(c) Es gilt $r(h) \to 0$ für $h \to 0$.
Anmerkung. Der Witz ist hier, dass die Aussagen für *jede* Gerade g durch $(\xi, f(\xi))$ gilt! Außerdem bleibt die Aussage richtig, falls f nur stetig in ξ ist.

(d) Es gilt $\frac{r(h)}{h} \to 0$ $(h \to 0)$ genau dann, wenn g die Tangente an f in ξ ist (d.h. falls $\alpha = f'(\xi)$ ist).

(e) Fertige eine Skizze an.

Roland Steinbauer, Oktober 2012

$\boxed{5}$ *Nützliche Ableitungsregeln.*
Sei $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine differenzierbare Funktion. Für welche x sind die Funktionen

(a) $f_1(x) = \sqrt{f(x)}$ (b) $f_2(x) = \log(f(x))$

differenzierbar? Berechne die Ableitungen.

$\boxed{6}$ *Ableitungen (un)gerader Funktionen.*
Eine Funktion f heißt gerade, falls $f(-x) = f(x)$ und ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$.

(a) Zeige, dass die Ableitungen von differenzierbaren geraden (bzw. ungeraden) Funktionen ungerade (bzw. gerade) sind.
Tipp: Verwende die Spiegelung $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma(x) = -x$ und betrachte $f \circ \sigma$.

(b) Zeige, dass die Polynomfunktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

genau dann gerade (bzw. ungerade) ist, wenn $a_k = 0$ für alle ungeraden Indizes k (bzw. alle geraden Indizes k) gilt.
Achtung, es handelt sich hier um eine Äquivalenz! Für die schwierigere Richtung bietet sich ein Induktionsbeweis (nach n) an.

$\boxed{7}$ Differenzierbarkeit 4.
Für welche x sind die folgenden Funktionen definiert, für welche x sind sie differenzierbar? Warum bzw. warum nicht? Berechne gegebenenfalls die Ableitung.

(a) $f_1(x) = e^{\sin(x)}$ (b) $f_2(x) = \cos(\log(x))$
(c) $f_3(x) = \sin(e^{x^2})$ (d) $f_4(x) = \log\sqrt{1 + \sin^2(x)}$
(e) $f_5(x) = \sin^2\left(x^3 + \cos(x^2)\right)$ (f) $f_6(x) = \sqrt{x^2 + \cos^2(\sqrt{x})}$

$\boxed{8}$ *Differenzierbar?*
Für welche x sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Berechne gegebenenfalls die Ableitung und fertige jeweils eine Skizze von Funktion und Ableitung an.

(a) $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Achtung: Natürlich liegt der Hund in $x = 0$ begraben. Dort hilft die Definition der Differenzierbarkeit!

$\boxed{9}$ *Eine einfache Differentialgleichung.*
Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c\exp(ax)$ $(a, c \in \mathbb{R})$ das sogenannte Anfangswertproblem

$$f'(x) = af(x) \quad (DG), \qquad f(0) = c \quad (AB)$$

bestehend aus der Differentialgleichung (DG) und der Anfangsbedingung (AB) löst.

Roland Steinbauer, Oktober 2012