Prüfungsausarbeitung

$\boxed{\text{7. TERMIN, 28.7.2014}}$

$\boxed{1}$ (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ im Folgenden ein Intervall.

Eine Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $\xi \in I$, falls

$$\lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$$ existiert und endlich ist.

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt. Eine Fkt $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f (auf I), falls $F'(x) = f(x) \; \forall x \in I$.

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt. $\xi \in I$ heißt Wendestelle von f, falls in ξ das Krümmungsverhalten ändert.

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Ober- und Unterintegral von f sind definiert als

$$\int_a^{b\,*} f(t)\,dt := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)\,dt \;\middle|\; \varphi \in T[a,b],\ f \leq \varphi \right\}$$

$$\int_{a\,*}^{b} f(t)\,dt := \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)\,dt \;\middle|\; \psi \in T[a,b],\ \psi \leq f \right\}.$$

f heißt R-intbar, falls $\int_a^{b\,*} f = \int_{a\,*}^{b} f$.

$\boxed{1}$ (b) Falls $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar sind, dann gilt

$$\int_a^b f'(t) g(t)\,dt = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t) g'(t)\,dt.$$

[1] (b) Fortsetzung: Beweis: Wir definieren $F = f g \xRightarrow{\text{Kettenr.}}$
$F' = f'g + fg'$ und wegen dem HsDI gilt

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f'g + \int_a^b fg' \,. \qquad \square$$

[1] (c) Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diff'bar auf (a,b) und $f(a)=f(b)$.
Dann $\exists\, \xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi)=0$

<u>Beweis</u>. Falls f konstant, dann ist der Satz evident. Sei also f nicht konstant.

$\Longrightarrow \exists\, x \in (a,b)$ mit OBdA $\overline{\underline{f(x)} > \underline{f(a)} = \underline{f(b)}}$ $(*)$

f stetig auf $[a,b] \xRightarrow{\text{Satz v. Max}} \exists\, \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b]$

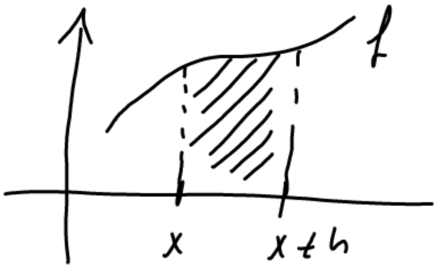
$(*) \Rightarrow \xi \neq a,\ \xi \neq b$ also $\xi \in (a,b) \xRightarrow[\text{für Max}]{\text{notw. Bed}} f'(\xi) = 0.$ $\square$

Die Stetigkeit von f auf $[a,b]$ wird als Voraussetzung für den Satz vom Maximum verwendet: Stetige Fkt nehmen auf kp Mengen Max & Min an.

[2] (a) Sei $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ dann gilt für den Differenzenquotienten von F bei x:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = (*)$$

Der Zähler entspricht der schraffierten Fläche

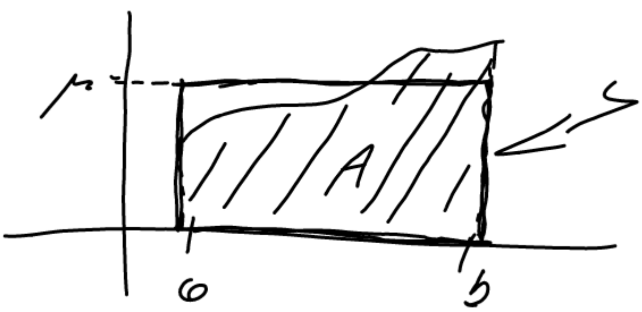


Diese ist ca. $f(x)\cdot h$ und daher

$$(*) \approx \frac{f(x)\cdot h}{h} = f(x)$$

(b) Die Aussage lautet: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, dann $\exists \xi\in[a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

Die anschauliche Interpretation für der Einfachheit halber pos. f. ist: $\int_a^b f(x)\,dx$ entspricht der Fläche A unter dem Graphen von f. Anschaulich ist klar, dass es ein Rechteck über $[a,b]$ mit Fläche A geben muss. Dessen Höhe μ liegt im Bild $f[a,b]$ und daher wird nach ZWS μ angenommen, d.h. $\exists \xi\in[a,b]$ mit $f(\xi)=\mu$ also $A=f(\xi)(b-a)$



$\boxed{2}$ (c) Das prototypische Verhalten in einer Stelle der <u>nicht</u>-Differenzierbarkeit ist ein <u>Knick</u>, zB $|x|$ bei $x=0$ oder ein „<u>unendlicher Anstieg</u>" wie bei $\sqrt{x}$ in $x=0$

[Achtung: Es gibt aber auch stetige Fkt, die in keinem Pkt diffbar sind.]

$\boxed{2}$ (a) $\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$ und daher nach Umkehrsatz

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} =$$

$\cos' = -\sin$ $\arcsin = \sin^{-1}$ $\sin^2 = 1 - \cos^2$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(b) • Jede stetige Fkt die nicht diffbar ist oder jede Treppenfkt.

• $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ hat ein striktes lok Minimum in $\xi = 0$ [$|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \iff x = 0$]
aber $f'(0)$ existiert nicht [die linksseitige Abl $= -1$ stimmt nicht mit der rechtsseitigen $= +1$ überein.]

(c) $$\int_0^{\pi/4} \cos(4t)\,dt = 1/4 \int_0^{\pi} \cos(u)\,du = 1/4 \sin(u)\Big|_0^{\pi} = 0$$
$$\begin{bmatrix} u = 4t \\ du/dt = 4 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$ (a) Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar und 2-mal diffbar in $\xi \in (a,b)$, dann gilt

$$f'(\xi) = 0,\ f''(\xi) < 0 \ [>0] \Rightarrow f \text{ hat in } \xi \text{ ein striktes lok Max [Min]}$$

Beweis. Wir behandeln nur den Fall des Max [Min analog]

Für f, ξ wie oben gilt

$$0 > f''(\xi) = \lim_{\xi \neq x \to \xi} \frac{\overbrace{f'(\xi)}^{=0 \text{ lt. Voraus}} - f'(x)}{\xi - x}$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon): 0 > \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} = \frac{f'(x)}{x - \xi}$$

$\Rightarrow \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi): f'(x) > 0 \Rightarrow f$ str. mon wachsend

$\forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon): f'(x) < 0 \Rightarrow$ — " — fallend

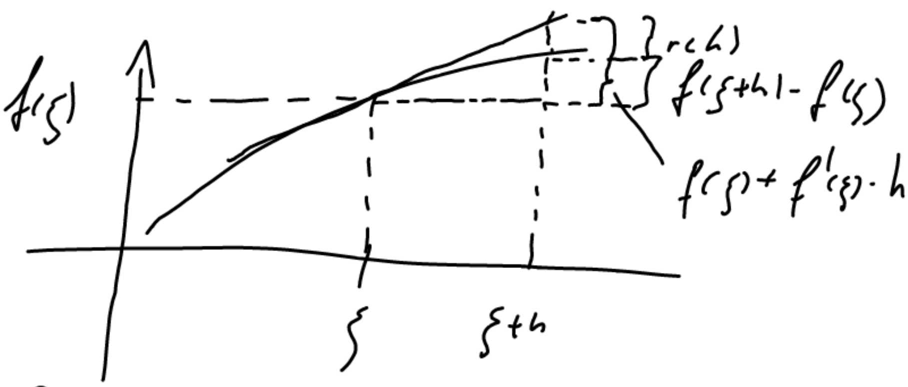
$\Rightarrow \xi$ ist str. lok Max

□

4 (b) Sei f diffbar in ξ, dann gilt

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} - f'(\xi) =: \frac{r(h)}{h}$$

aha $a = f'(\xi)$ aha $r(h) = f(\xi + h) - f(\xi) - f'(\xi) \cdot h$



[Insbesondere geht der Rest $r(h)$ schnell gegen 0, im präzisen Sinne von $r(h)/h \to 0$ $(h \to 0)$. Nur $r(h) \to 0$ gilt für jede Gerade der Form $f(\xi) + ch$.]

$\boxed{4}$ (c) Folgt direkt aus dem MWS: Seien $x<y \in [a,b]$

$$\overset{\exists \xi \in [x,y]}{\Longrightarrow} f(y)-f(x) = f'(\xi)(y-x)$$

$$\Longrightarrow |f(y)-f(x)| \leq C|y-x|$$

$\boxed{5}$ (a) Richtig: Jede diff'bare Fkt ist stetig; daher hat jede 2x diff'bare Fkt eine stetige Ableitung.

(b) Richtig, denn sei $F'=f$, dann gilt

$$(F-2c)' = F'+0 = f.$$