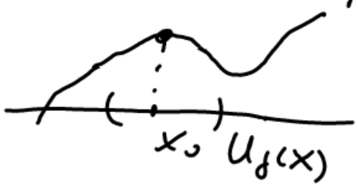
Prüfungsausarbeitung

5. Termin

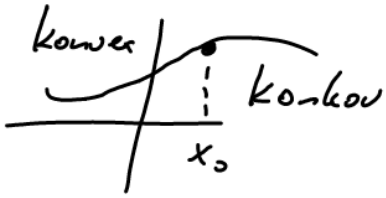
[1] (a) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- $x_0 \in I$ heißt lokale(s) Max [Min], falls $\exists\, \delta > 0$ sodass
  $$f(x) \le f(x_0) \quad [f(x) \ge f(x_0)] \quad \forall x \in U_\delta(x_0)$$

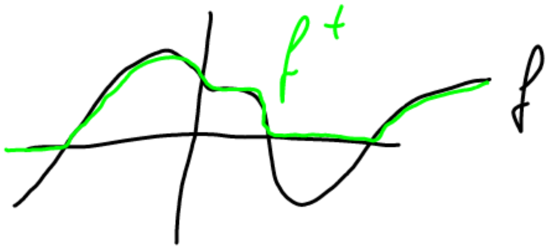


lok. Max

- $x_0 \in I$ heißt Wendestelle, falls f in x_0 ihr Krümmungsverhalten ändert. z.B.:



- $$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \ge 0 \\ 0 & f(x) \le 0 \end{cases}$$



(b) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig & streng mon. auf dem Intervall I und diffbar in $\xi \in I$ mit $f'(\xi) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfkt $f^{-1}: f(I) \to I$ diffbar in $f(\xi)$ mit

$$(f^{-1})'(f(\xi)) = 1 / f'(\xi).$$

__Beweis.__ Wegen des Satzes von der Stetigkeit der Umkehrfkt ist $f^{-1}: J := f(I) \to I$ stetig und J ein Intervall.

Sei $\eta_n \to \eta := f(\xi)$ eine Folge in $J \setminus \{\eta\}$

f bij $\Longrightarrow$ $\xi_n := f^{-1}(\eta_n)$ ist Folge in $I \setminus \{\xi\}$

f^{-1} stetig $\Longrightarrow$ $\xi_n \to f^{-1}(\eta) = \xi$

Daher
$$\frac{f^{-1}(\eta_n) - f^{-1}(\eta)}{\eta_n - \eta} = \frac{\xi_n - \xi}{f(\xi_n) - f(\xi)} \xrightarrow{\substack{f \text{ diffb. in } \xi \\ f'(\xi) \neq 0}} 1/f'(\xi)$$

$\overset{\text{l. Def}}{\Longrightarrow}$ f^{-1} diffbar in η mit $(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi) = 1/f'(f(\eta))$ $\square$

Der Satz benötigt als zusätzliche Voraussetzung $f'(\xi) \neq 0$. Diese ist tatsächlich notwendig, denn seien f, f^{-1} diffb. in ξ, η dann gilt nach Kettenregel

$$\xi = f^{-1}(f(\xi)) \Longrightarrow 1 = (f^{-1})'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$$

$$\Longrightarrow f'(\xi) \neq 0$$

$\boxed{1}$ (c) Für $0 \neq h$ klein genug und $\xi + h \in I$ gilt $f(\xi+h) \neq 0$ (Nichtverschwinden auf Umgebung).

Daher können wir rechnen

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{f(\xi+h)} - \frac{1}{f(\xi)}\right) = \frac{\overbrace{f(\xi) - f(\xi+h)}^{\to -f'(\xi)}}{h\,\underbrace{f(\xi+h)}_{\to f(\xi)}\, f(\xi)} \xrightarrow{\text{weil } f \text{ diffb. in } \xi} \underline{\underline{\frac{-f'(\xi)}{f(\xi)^2}}}$$

Daher ist $1/f$ diffbar in ξ mit $\left(\frac{1}{f}\right)'(\xi) = -\frac{f'(\xi)}{f(\xi)^2}$

$\boxed{2}$ (a) $f(x)=e^x$ ist konvex $[f''(x)=e^x>0]$

$f(x)=-x^2$ ist konkav $[f''(x)=-2<0]$

(b) $\frac{e^x-1}{x} \to$ „$\frac{0}{0}$" de L'Hospital $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$

(c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $g(x):=\sqrt{|f(x)|}$ ist definiert auf ganz $\mathbb{R}$

aber nicht diffbar in den NST von f, d.h.

g diffb auf $\mathbb{R}\setminus\{x \mid f(x)=0\}$; dort gilt

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{|f(x)|}}\,f'(x)$$

x: $f(x)>0$: $g(x)=\sqrt{f(x)} \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\,f'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{|f(x)|}}$

x: $f(x)<0$: $g(x)=\sqrt{-f(x)} \Rightarrow g'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{f(x)}}\,f'(x)=\frac{-f'(x)}{2\sqrt{|f(x)|}}$

(d) diffbar aber nicht intbar: $\nexists$ denn diffb $\Rightarrow$ stetig

unstetig aber intbar: Jede Treppenfkt $\Big\}\Rightarrow$ intbar

C^1 aber nicht 2x-diffb: $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^2 & x\ge 0\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & x>0\end{cases}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\left.\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{x}=x\end{cases}\right\}\xrightarrow[x\to 0]{} 0 \Rightarrow \underline{f'(0)=0}$$

Also $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ aber $f''(0) \nexists$, denn linksseitige Ableitung von f' ist 0 aber für $x>0$ gilt $\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \frac{2x}{x} = 2 \not\to 0 \quad (x \searrow 0)$.

$\boxed{3}$ (a) <u>Hauptsatz</u>: Sei I ein Intervall und $a, b \in I$ und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

(i) $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \in \mathcal{C}^1(I)$ und $F' = f$

(ii) Für jede beliebige Stammfkt F von f gilt
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Der HS besagt, dass Differenzieren <u>im Wesentlichen</u> inverse Operationen sind. Genauer gilt für die Operatoren:

$$D: \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^0(I), \; f \mapsto f'$$
$$R: \mathcal{C}^0(I) \to \mathcal{C}^1(I), \; f \mapsto F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

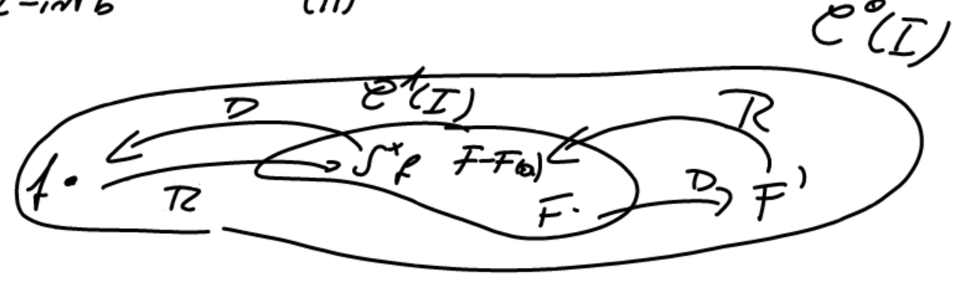
$D \circ R = id : \mathcal{C}^0(I) \to \mathcal{C}^0(I)$ und

$$\Big[\; \mathcal{C}^0 \ni f \overset{R}{\longmapsto} \underbrace{\int_a^x f(t)\,dt}_{\in \mathcal{C}^1 \text{ wegen (i)}} \overset{D}{\longmapsto} \underbrace{f \in \mathcal{C}}_{\text{wegen (i)}} \;\Big]$$

$R \circ D = id - F(a) : \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^1(I)$

$$\Big[\; \mathcal{C}^1 \ni F \overset{D}{\longmapsto} \underbrace{F'}_{\in \mathcal{C}^0,\, R\text{-intb}} \overset{R}{\longmapsto} \int_a^x F'(t)\,dt \underset{\text{(ii)}}{=} F(x) - F(a) \;\Big]$$

<u>Als Skizze</u>:



[3] (b) MWS: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffb. auf (a,b), dann $\exists \xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

Die anschauliche Bedeutung ist, dass f unter obigen Voraussetzungen eine Stelle ξ besitzt an der die Tangente parallel zur Sekante durch a, b ist.

Das ist anschaulich evident: Beginnt f steiler als die Sekante, dann muß sie irgendwann flacher werden und nimmt dazwischen die Steigung der Sekante an; Analog umgekehrt

Anwendungen: • $|f'(x)| \leq C \Rightarrow f(b)-f(a) \leq C(b-a)$
(Wachstumsschranken)

• (Monotonie & Ableitung): $f'(x) \geq 0 \ \forall x \Leftrightarrow f$ mon. wachsend.

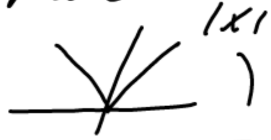
[4] (a) f diffbar in $\xi \Rightarrow f$ stetig in ξ: Sei x nahe ξ, $x \neq \xi$

dann gilt: $$f(x)-f(\xi) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}(x-\xi) \xrightarrow{x \to \xi} f'(\xi) \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow f(x) \to f(\xi) \quad (x \to \xi) \Rightarrow f$ stetig in ξ

$\boxed{4}$ (b) $f(x)=\sqrt{x}$ auf $\{x \mid x\geq 0\}$ ist stetig (als Potenzfkt $x^{1/2}$) aber nicht diffbar in $x=0$, denn für den rechtsseitigen Differenzenquotienten gilt

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty \quad (x\to 0)$$

Anschaulich haben stetige aber nicht diffbare Funktionen Knicke (wie etwa $|x|$ bei 0 

) oder „unendlichen Anstieg" (wie oben 

)

(Strenggenommen ist die Sache aber komplizierter zB ist die Weierstraßfkt $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\sin(2^k x)}{3^k}$ stetig auf $\mathbb{R}$ aber nirgend diffbar.)

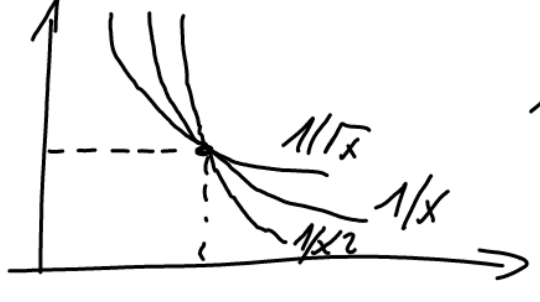
(c) $\int_0^1 x^{-s}\,dx$ konvergiert $\iff s<1$, denn sei

$\underline{s\neq 1}$, dann gilt für $\varepsilon>0$, ε klein

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}\,dx = \frac{1}{1-s}\,x^{1-s}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-s}}{1-s} \xrightarrow[(\varepsilon\to 0)]{} \begin{cases}\infty & s>1\\ \frac{1}{1-s} & s<1\end{cases}$$

Falls $\underline{s=1}$, dann gilt

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \log(x)\Big|_\varepsilon^1 = -\log(\varepsilon) \xrightarrow{(\varepsilon\to 0)} \infty$$



Anschaulich: die Fläche unter zB $1/\sqrt{x}$ zwischen 0 und 1 ist endlich, die zB unter $1/x$, $1/x^2$ nicht.

15 (a) JA, denn jede stetige Fkt kann auf einem kp Intervall glm durch Treppenfkt approximiert werden, d.h. für stetiges f auf $[a,b]$, $\forall \varepsilon>0\ \exists\ \varphi \le f \le \psi$, $\varphi, \psi \in T[a,b]$ mit $|\varphi(x) - \psi(x)| \le \varepsilon$ auf $[a,b]$.

Daher gilt $$0 \le \int_a^b (\psi - \varphi) \le \varepsilon (b-a)$$

und daher ist f R-intbar.

(b) JA, denn $$\int_a^b f'g = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'$$ kann mittels HsDI und $F = f \cdot g$ umgeschrieben werden zu

$$\int_a^b (f'g + g'f) = \int_a^b (fg)' = \int_a^b F' = F\Big|_a^b = fg\Big|_a^b.$$

Kettenregel