Prüfungsausarbeitung | 1. TERMIN, 11.1.2013

GRUPPE A

$\boxed{1}$ (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ im Folgenden ein Intervall.

Eine Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $\xi \in I$, falls
$$\lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$$ existiert und endlich ist.

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt. Eine Fkt $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f (auf I), falls $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt. $\xi \in I$ heißt Wendestelle von f, falls in ξ das Krümmungsverhalten ändert.

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Ober- und Unterintegral von f sind definiert als
$$\int_a^{b*} f(t)\,dt := \inf\left\{\int_a^b \varphi(t)\,dt \mid \varphi \in \mathcal{T}[a,b],\ f \leq \varphi\right\}$$
$$\int_{a*}^{b} f(t)\,dt := \sup\left\{\int_a^b \psi(t)\,dt \mid \psi \in \mathcal{T}[a,b],\ \psi \leq f\right\}.$$

f heißt R-intbar, falls $\int_a^{b*} f = \int_{a*}^{b} f$.

$\boxed{1}$ (b) Falls $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar sind, dann gilt
$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

[1] (b) Fortsetzung: Beweis: Wir definieren $F = f \cdot g \overset{\text{Kettenr.}}{\Longrightarrow}$ $F' = f'g + fg'$ und wegen dem HsDI gilt

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f'g + \int_a^b fg' . \quad \square$$

[1] (c) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diff'bar auf (a,b) und $f(a) = f(b)$. Dann $\exists \xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$

Beweis. Falls f konstant, dann ist der Satz evident. Sei also f nicht konstant.

$\Longrightarrow \exists x \in (a,b)$ mit OBdA $f(x) > f(a) = f(b)$ $(*)$

f stetig auf $[a,b] \overset{\text{Satz v. Max}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) \geq f(x) \; \forall x \in [a,b]$

$(*) \Rightarrow \xi \neq a, \xi \neq b$ also $\xi \in (a,b) \underset{\text{für Max}}{\overset{\text{notw. Bed}}{\Longrightarrow}} f'(\xi) = 0. \quad \square$

Die Stetigkeit von f auf $[a,b]$ wird als Voraussetzung für den Satz vom Maximum verwendet: Stetige Fkt nehmen auf kp Mengen Max & Min an.

[2] (a) Der HsDI besagt, dass Differenzieren und Integrieren im Wesentlichen inverse Operationen sind. Genauer sei I ein Intervall und seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt für $f : I \to \mathbb{R}$ stetig

(i) $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ ist stetig diff'bar und es gilt $F' = f$. (d.h. insbes. ist F eine Stammfkt. von f)

(ii) $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ für jede Stammfkt F von f.

Mit den Bezeichnungen wie oben gilt also

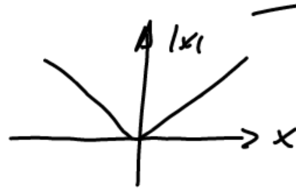
$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x) \quad \text{bzw} \quad \int_0^x F'(t)\,dt = F(x)-F(0)$$

Also gilt für die Abbildungen

$$D: \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}(I), \quad F \mapsto F' \qquad \text{und} \qquad R: \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}^1(I), \quad f \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

$$D\circ R = id_{\mathcal{C}(I)} \quad \text{und} \quad R\circ D(F) = F - F(0)$$

12 (b) Das prototypische Verhalten in einer Stelle der <u>nicht</u>-Differenzierbarkeit ist ein <u>Knick</u>, zB $|x|$ bei $x=0$.



Es gibt aber auch Fkt die überall stetig sind, aber in keiner Stelle differenzierbar.

13 (a) Wir berechnen den Differenzenquotienten

$$\frac{1/f(\xi+h) - 1/f(\xi)}{h} = \frac{f(\xi)-f(\xi+h)}{h\, f(\xi) f(\xi+h)} = -\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\,\frac{1}{f(\xi)f(\xi+h)}$$

bemerke $f(\xi+h) \neq 0$ für h klein, weil f stetig in ξ und $f(\xi)\neq 0$

$$\longrightarrow -f'(\xi)\cdot\frac{1}{f^2(\xi)} \quad (h\to 0)$$

f diffbar in $\xi \Rightarrow$ stetig in ξ

13 (b) Seien $x,y\in I \overset{MWS}{\Longrightarrow} \exists\, \xi\in(x,y)$ mit

$$|f(x)-f(y)| = |f(\xi)||x-y| \overset{\text{lt. Voraus}}{\leq} C|x-y|$$

$\boxed{3}$ (c) oBdA sei ξ ein lok. Maximum.

$$\overset{\text{Def}}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0: \; f(\xi) \geq f(x) \;\; \forall x \in U_\varepsilon(\xi)$$

$$\overset{f \text{ diffb.}}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\lim_{x \nearrow \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\geq 0} = f'(\xi) = \underbrace{\lim_{x \searrow \xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\leq 0}$$

$$\Longrightarrow \; 0 \leq f'(\xi) \leq 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

$\boxed{3}$ (d) $(x^\alpha)' = (\exp(\alpha \log(x)))' \overset{\text{Kettenregel}}{=} \exp(\alpha \log(x)) \cdot (\alpha \log(x))'$

$$= x^\alpha (\alpha \, {}^1\!/_x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$\boxed{4}$ (a) Der Differenzenquotient bei 0 hat keinen Limes, denn:

$$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \begin{cases} h/h = 1 & (h>0) \\ -h/h = -1 & (h<0) \end{cases}$$

(b) $\int \log(x)\,dx = \int 1 \log(x)\,dx \overset{PI}{=} x \log(x) - \int x \frac{1}{x}\,dx$

$$= \underline{x \log(x) - x}$$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ist diffbar in 0 mit $f'(0) = 0$ denn

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = h \sin {}^1\!/_h \to 0 \; (h \to 0)$$

$\boxed{4}$ (c) Fortsetzung: Aber für $x \neq 0$ gilt

$$f'(x) = \underbrace{2x \sin(1/x)}_{\to 0 \ (x \to 0)} - \cos(1/x) \quad \text{und} \quad f'(x) \not\to f'(0)$$

$$\nearrow \lim_{x \to 0} \nexists$$

Also ist $x \mapsto f'(x)$ in 0 nicht stetig.

$\boxed{4}$ (d) Weil $f(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ und $\sqrt{\ }$ diffbar auf $(0,\infty)$ ist g auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar.

$$g'(x) = \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$$

$\boxed{5}$ (a) Richtig, denn $f'' = (f')' \ \exists \Rightarrow f'$ stetig

(b) Falsch, denn für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \log(1) - \log(\varepsilon) = -\log(\varepsilon)$$

$$\longrightarrow \infty \quad (\varepsilon \to 0)$$

(c) Richtig, denn f diffbar $\Rightarrow f$ stetig auf $\mathbb{R}$

$(\Rightarrow f$ stetig auf jedem $[a,b])$

$\Rightarrow f$ R-intbar auf jedem $[a,b]$.

[GRUPPE B]

$\boxed{1}$ (a) Sei I im Folgenden ein Intervall.

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt und sei $\xi \in I$. Der Ausdruck

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \qquad (x \in I)$$

heißt Differenzenquotient von f bei ξ.

$f: I \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig (dehnungsbeschränkt), falls $\exists\, C>0$ sodass $\forall x,y \in I$ gilt

$$|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|$$

$f: I \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls $\forall x,y \in I$ $\forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda) f(y)$$

(d.h. die Sekante liegt über dem Graphen)

Für R-intbare Fkt siehe GRUPPE A $\boxed{1}$ (a)

$\boxed{1}$ (b) MWS: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig & diffbar auf (a,b). Dann $\exists\, \xi \in (a,b)$ mit

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

$\boxed{1}$ (c) HSDI: Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und seien $a,b \in I$. Dann gilt

[1] (c) Fortsetzung

(i) Die Funktion $F: I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist stetig diff.bar und es gilt $F' = f$.

(ii) Sei F eine beliebige Stammfkt von f, dann gilt $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Beweis. (i) f stetig $\Rightarrow$ f R-intbar und F ist definiert. Weiter gilt $(0 \neq h,\ x+h \in I)$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

MWS Int.

$\Longrightarrow \exists\, \xi_h \in [x, x+h]$ (bzw $[x+h, x]$) mit

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h) \cdot h$$

Falls $h \to 0$, dann geht auch ξ_h gegen x, denn $|x - \xi_h| \leq |x - (x+h)| = |h|$ und somit

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi_h) \underset{f \text{ stetig}}{\longrightarrow} f(x) \implies F' = f \text{ und}$$

damit $F \in \mathcal{C}^1$

Die Stetigkeit wurde 2mal verwendet:

1.) um überhaupt zu sehen, dass f R-intbar und somit F definiert ist und

Fortsetzung $\boxed{1}$ (c)

2) um zu sehen, dass $f(\xi_n) \to f(x)$ $(\xi_n \to x)$.

(ii) Sei $G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ wie in (i).

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ G ist Stammfunktion von f

$\Longrightarrow$ Jede Stammfkt von f ist von der Form
$F = G + c \quad (c \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt$$
$$= \int_a^b f(t)\,dt. \qquad \square$$

$\boxed{2}$ (a) siehe Gruppe A, $\boxed{3}$ (c)

(b) —— " —— $\boxed{3}$ (a)

(c) Sei $x \neq \xi$ und $x \in I$. Wir zeigen, dass $f(x) \to f(\xi)$ für $x \to \xi$ und damit ist f stetig in ξ. Tatsächlich:

$$f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}(x - \xi) \xrightarrow{} f'(\xi) \cdot 0 = 0$$

f diffb. in ξ

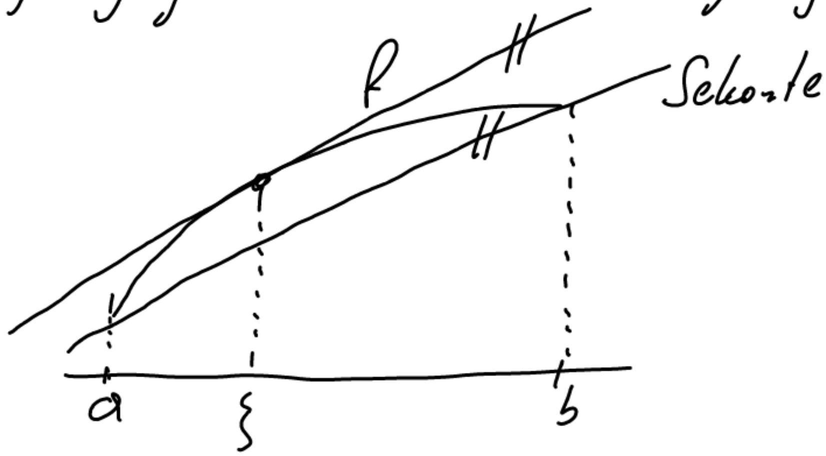
(d)
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Diff der Umkehrfkt

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}}$$

$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

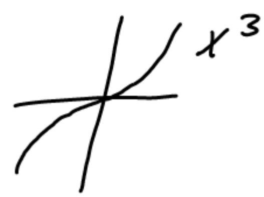
13 (a) Der MWS (Formulierung siehe 11 (b)) besagt, dass es eine Stelle $\xi \in (a,b)$ gibt wo die Tangentensteigung gleich der Sekantensteigung ist; graphisch



13 (b) Notwendig für das Auftreten von lok. Extrema ist das Verschwinden der Ableitung, also

$$\xi \text{ lok. Extr.} \Rightarrow f'(\xi) = 0$$

Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, denn $f(x) = x^3$ erfüllt $f'(0) = 0$ aber $x = 0$ ist kein Extremum



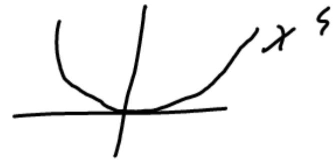
Für 2x diffbares f lautet eine hinreichende Bed. f. lok. Extrema

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi) = 0 \\ f''(\xi) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{lok. Extr. in } \xi$$

Genauer gilt $f''(\xi) < 0$ (>0) $\Rightarrow$ ξ lok. Max (Min)

$\boxed{3}$ (b) Fortsetzung:

Diese Bedingung ist nicht notwendig, denn $f(x)=x^4$ hat in $x=0$ ein Min aber $f''(0)=0$



$\boxed{4}$ (a) siehe Gruppe A $\boxed{5}$ (c)

(b) —— " —— $\boxed{5}$ (a)

(c) Falsch, denn $\forall a>1$ gilt

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \log(x)\Big|_1^a = \log(a) \longrightarrow \infty \quad (a \to \infty)$$

$\boxed{5}$ (a) siehe Gruppe A, $\boxed{4}$ (b)

(b) —— " —— $\boxed{4}$ (d)

(c) —— " —— $\boxed{4}$ (a)

(d) —— " —— $\boxed{4}$ (c)