

Familienname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studienkennzahl(en):

Bsp.	1	2	3	4	$\Sigma/40$

Note:

Analysis in einer Variable für LAK
Roland Steinbauer, Wintersemester 2012/13
1. Prüfungstermin (11.1.2013)
Gruppe A

1. *Definitionen, Sätze & Beweise.*

- (a) Definiere die folgenden Begriffe:
(in einem Punkt) differenzierbare Funktion, Stammfunktion, Wendestelle einer Funktion, Riemann-integrierbare Funktion (inkl. Ober- und Unterintegral)
(1+1+1+2 Punkte)
- (b) Formuliere die Regel zur partiellen Integration und beweise sie. (3 Punkte)
- (c) Formuliere den Satz von Rolle und beweise ihn.
Wo und wie wird die Stetigkeit der Funktion verwendet? (6 Punkte)

2. *Grundideen.*

- (a) Diskutiere die Bedeutung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. (4 Punkte)
- (b) Diskutiere, was es anschaulich für eine Funktion bedeutet, an einer Stelle *nicht* differenzierbar zu sein. (2 Punkte)

3. *Vermischtes.*

- (a) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in I$ und sei $f(\xi) \neq 0$. Zeige:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(\xi) = -\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)} \quad (2 \text{ Punkte})$$

- (b) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Eigenschaft $\exists C > 0$, sodass $|f'(\xi)| \leq C$ für alle $\xi \in I$. Zeige, dass dann für alle $x, y \in I$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|. \quad (2 \text{ Punkte})$$

- (c) Beweise: Hat eine differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Extremum in einem inneren Punkt ξ von I , dann verschwindet $f'(\xi)$. (2 Punkte)
- (d) Zeige: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ($\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$) (2 Punkte)

Bitte umblättern!

4. *Beispiele und Gegenbeispiele.*

- (a) Zeige: $|x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar. (1 Punkt)
- (b) Berechne $\int \log(x) dx$. (1 Punkt)
- (c) Diskutiere im Detail ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion, die nicht stetig differenzierbar ist. (2 Punkte)
- (d) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ differenzierbar. Wo ist $g(x) := \sqrt{f(x)}$ differenzierbar? Berechne die Ableitung von g . (2 Punkte)

5. *Richtig oder falsch?*

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. (Je 2 Punkte)

- (a) Jede zweimal differenzierbare Funktion ist stetig differenzierbar.
- (b) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ konvergiert.
- (c) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[a, b]$.