

ANALYSIS
IN EINER VARIABLE
FÜR LAK

ROLAND STEINBAUER

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

UNIVERSITÄT WIEN

WINTERSEMESTER 2012/13

2 WSTd / 4 ECTS

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 3: Differentiation

§ 0 Rückblick und Ausblick	5
0.1 Wiederholung aus „Was will und soll die Analysis“	5
0.2 Rückblick auf Kap. 1 & Kap. 2	6
0.3 Ausblick auf Kap. 3.....	7
0.4 Ausblick auf Kap. 3 - Details.....	7
0.5 Weiterer Ausblick auf die Vorlesung	9
§ 1 Differenzierbarkeit und Ableitung	11
1.1 Motivation: Änderungsverhalten von Funktionen.....	11
1.2 Definition: Differenzenquotient	14
1.3 Bemerkung: zwei Variablen.....	15
1.4 Definition: Limes von Funktionen auf Intervallen.....	15
1.5 Bemerkung: Technisches Detail	15
1.6 Definition: Differenzierbarkeit und Ableitung.....	16
1.7 Zur Bedeutung von 1.6 & einseitige Ableitung	17
1.8 Beispiele: höchste Zeit – differenzierbare und nicht differenzierbare Fkt	18
1.9 Bemerkung: (Nicht) differenzierbare Funktionen	21
1.10 Bemerkung: Historische Bemerkung 1 zum Tangentenproblem.....	22
1.11 Bemerkung: Historische Bemerkung 2 Newtonsche Mechanik.....	24
1.12 Bemerkung: Differenzierbarkeit vs. Stetigkeit	27
1.13 Theorem: diffbar => stetig.....	27
1.14 Motivation: weiteres Vorgehen	28
1.15 Proposition: Grundoperationen & Diffbarkeit – Differentiationsregeln.....	28
1.16 Beispiele: weitere diffbare Funktionen	30
1.17 Motivation: Differentiation als lineare Approximation.....	31
1.18 Bemerkung: Differentialquotient vs. lineare Approximation.....	32
1.19 Theorem: Differenzierbarkeit mittels linearer Approximation.....	33
1.20 Bemerkung: Zur Bedeutung von 1.19.....	33
1.21 Beispiel: Der Sinus bei 0	36
1.22 Motivation: zurück zum Baukasten	37
1.23 Theorem: die Kettenregel	37
1.24 Bemerkung: zur Kettenregel	38
1.25 Bemerkung: Ableitung der Umkehrfunktion.....	40
1.26 Motivation/Erinnerung: Umkehrfunktion.....	41
1.27 Theorem: Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion.....	41
1.28 Beispiel: Ableitung des Logarithmus & eine berühmte Formel	42
1.29 Beispiele: weitere diffbare Funktionen.....	43
1.30 Bemerkung: höhere Ableitungen	44

§ 2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	47
2.1 Intro	47
2.2 Definition: lokale Extremwerte	48
2.3 Bemerkung: Extrema & Ableitung, die Idee	49
2.4 Proposition: Notwendige Bedingung für lokale Extrema	49
2.5 Beispiel: Extrema des Sinus.....	50
2.6 Warnung: Notwendig vs. Hinreichend, lokal vs. global.....	51
2.7 Motivation: lokale Änderungsrate – globale Eigenschaften	52
2.8 Theorem: der Mittelwertsatz	53
2.9 Bemerkung: Beweisstrategie „Kippen“ des Graphen.....	54
2.10 Lemma: Satz von Rolle.....	54
2.11 Bemerkung: zum Satz von Rolle und seinem Beweis.....	55
2.12 Beweis des Mittelwertsatzes (MWS Diff.).....	56
2.13 Bemerkung: Anwenden des MWS.....	57
2.14 Korollar: Wachstumsschranken	57
2.15 Bemerkung: Lipschitzstetigkeit	58
2.16 Beispiel: der Sinus ist dehnungsbeschränkt	59
2.17 Proposition: Monotonie via Ableitung.....	60
2.18 Warnung: Die Umkehrung von 2.17 ii ist falsch	60
2.19 Korollar: Hinreichende Bedingung für lok. Extrema.....	61
2.20 Beispiel: nochmals Extrema des Sinus.....	62
2.21 Warnung: Hinreichend – nicht notwendig!.....	62
2.22 Motivation: Konvexität.....	62
2.23 Definition: Konvexe Funktion	64
2.24 Proposition: Konvexität via f''	64
2.25 Beispiele: konvexe & konkave Funktionen	66
2.26 Bemerkung: Wendestellen	66
2.27 Motivation: Die Regeln von De L'Hospital.....	67
2.28 Lemma: Verallgemeinerter MWS Diff.	68
2.29 Bemerkung: zum Verallgem. MWS Diff.....	69
2.30 Satz: Regeln von De L'Hospital	69
2.31 Beispiele: Die Regeln von De L'Hospital.....	69
 Kapitel 4: Integration	 73
§ 1 Das Riemann Integral	74
1.1 Intro	74
1.2 Definition: Treppenfunktion.....	77
1.3 Lemma $\mathcal{T}[a,b]$ ist ein Vektorraum.....	78
1.4 Definition: Integral für Treppenfkt.....	78
1.5 Bemerkung: zum Integral in 1.4	79
1.6 Proposition: Linearität & Monotonie des Integrals auf $\mathcal{T}[a,b]$	80
1.7 Motivation: das Riemann-Integral.....	81
1.8 Definition: das Riemann Integral.....	82
1.9 Beispiele: R-intbare & nicht R-intbare Funktionen	83
1.10 Motivation: Integrabilitätskriterium.....	83
1.11 Theorem: Integrabilitätskriterium (Einwickeln zw. Treppenfkt.)	84
1.12 Korollar: stetige & monotone Fkt. sind R-intbar	84

1.13 Satz: Approximation stetiger Fkt. durch Treppenfkt.....	85
1.14 Motivation: Grundeigenschaften – zum Zweiten	88
1.15 Proposition: Linearität & Monotonie des R-Integrals	89
1.16 Motivation: In Richtung Dreiecksungleichung	90
1.17 Definition: positiver & negativer Teil einer Funktion.....	90
1.18 Bemerkung: zu f_+ , f_- und $ f $	90
1.19 Proposition: Dreiecksungleichung für Riemann-Integrale.....	91
1.20 Korollar: Integrierbarkeit von Produkten.....	91
1.21 Motivation: Mittelwertsatz (MWS) der Integralrechnung.....	92
1.22 Proposition MWS der Integralrechnung	93
1.23 Bemerkung: Teilintervalle & Orientierung.....	94
1.24 Bemerkung: Riemann-Summen	95
§ 2 Integral & Ableitung	99
2.1 Intro	99
2.2 Definition: Stammfunktion.....	99
2.3 Beispiel: Stammfunktion	99
2.4 Motivation: 2 Fragen zur Stammfunktion.....	100
2.5 Proposition: Differenz von Stammfunktionen	100
2.6 Motivation: Zum Programm aus 2.4	102
2.7 Theorem: Hauptsatz der Differential & Integralrechnung.....	102
2.8 Bemerkung: Die Bedeutung des HS DI	103
2.9 Motivation: konkretes Integrieren	105
2.10 Bemerkung: Terminologische Katastrophe: unbestimmtes Integral.....	106
2.11 Beispiele: Höchste Zeit: konkretes Integrieren	107
2.12 Motivation: Mehr Werkzeuge	107
2.13 Proposition: Partielle Integration.....	108
2.14 Beispiele: Partielle Integration	108
2.15 Proposition: Substitutionsregel.....	109
2.16 Bemerkung: zur Substitutionsregel	109
2.17 Beispiele: zur Substitutionsregel	110
§ 4 Uneigentliche Integrale	112
4.1 Intro	112
4.2 Definition: Uneigentliches Integral Fall 1 (eine uneig. Integralgrenze)	112
4.3 Beispiel: Uneig. Integral Fall 1	113
4.4 Definition: Uneig. Integral Fall 2 (Integr. an 1 Integrationsgrenze unbeschr./undef.)	114
4.5 Beispiel: Uneig. Integral Fall 2	114
4.6 Definition: Uneig. Integral Fall 3 (komb. Fall – beide Integrationsgrenzen kritisch).....	115
4.7 Beispiel: Uneig. Integral Fall 3	115
4.8 Motivation: Konvergenztests für uneigentl. Integrale.....	117
4.9 Proposition: Konvergenztests für uneigentl. Integrale	117
4.10 Beispiele: Konvergenztests.....	119
4.11 Motivation: Integraltest für Reihen.....	120
4.12 Proposition: Integraltest für Reihen.....	120

3] DIFFERENTIATION

Bevor wir tatsächlich mit dem Thema Differentialrechnung starten sehen wir dies in Beziehung ersten Teil der Vo und geben auch einen Ausblick auf die weiteren Themen dieow 2. Teils der Vo - zyklus Analysis.

§0 RÜCKBLICK & AUSBLICK

0.1 Wt zu 10] §0 (Was will und was soll die Analysis)

Der inhaltliche Kern der Analysis ist [10] 0.2] die Differential- & Integralrechnung.

Genauer: das Verstehen & Beschreiben des Änderungsverhaltens von Funktionen

Noch genauer ist das Hauptthema der Analysis:

Welche Begriffe eignen sich am Besten dazu die Änderung einer Fkt im Kleinen (d.h. lokal um einen Pkt im Defbereich) zu verstehen und was kann man darüber über die Fkt im Großen (d.h. ihren Gesamtverlauf) sagen!

0.2 RÜCKBLICK auf 11] & 12]

Zentraler Begriff: | STETIGKEIT

- beschreibt ja genau das lokale Änderungsverhalten von Fkt
- aber noch nicht genau genug?
- baut auf auf dem ↴

Zentraler
Begriff:

GRENZWERTBEGRIFF

- liefert via (obs konst) Reihen auch das Hauptwerkzeug zur Konstruktion interessanter Fkt (über Polynome & rationale Fkt hinausgehend)

↳ $\exp, \log, \sin, \cos, \tan, \arcsin, \arccos, \arctan$
 $x^\alpha, \sinh, \cosh, \tanh$

Mit diesen Inhalten und auch den Techniken der EITA haben wir einen Grundstein auf dem wir hoch hinaus aufbauen können.

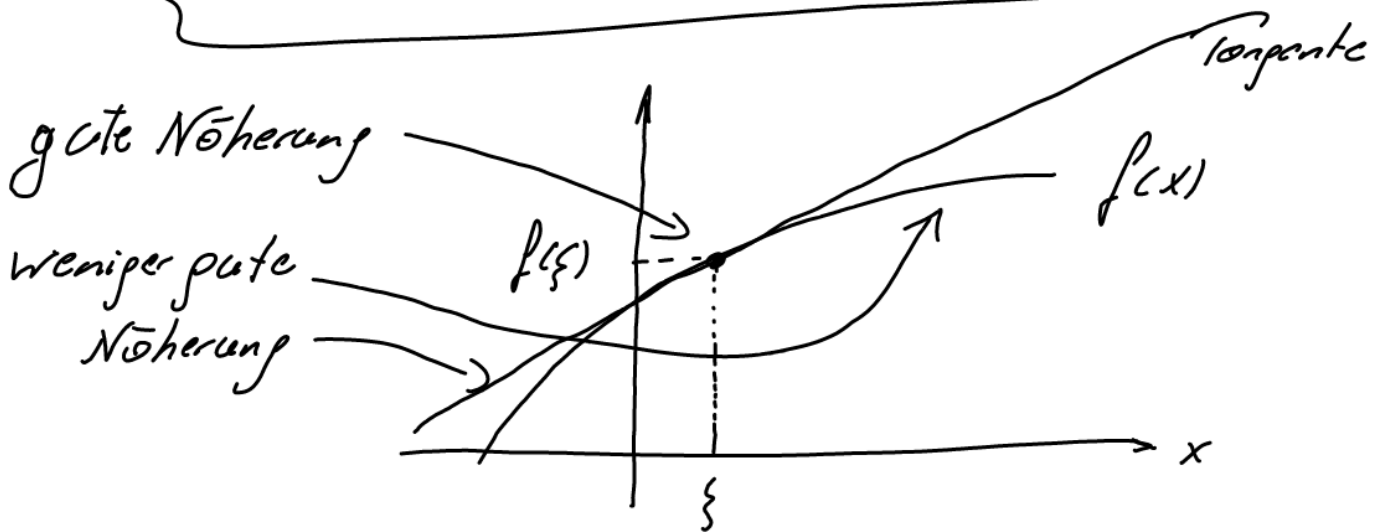
0.3 Ausblick auf [3]:

Hier nimmt unser Studium des Änderungsverhalten von Fkt die aller entscheidende Wendung?

Idee: Vergleiche die Änderung einer Fkt f nahe ξ (Pkt im Defbereich) mit der einfachsten nicht-konstanten Fkt $x \mapsto x$

geht weit
über
Skript
hinweg

Formaler: f heißt differenzierbar in ξ , falls f nahe $[\xi]$ $\rightarrow \xi$ gut durch eine Gerade (ihre Tangente) approximiert werden kann.



Wir werden sehen, dass diese Idee enorm weit trägt!

0.4 Ausblick auf [3] - Details

(i) Zunächst werden wir in §1 die Begriffe Differenzierbarkeit & Ableitung von Fkt gründlich untersuchen.

Notürlich spielen hier die „alten Bekannten“
Differenzenquotient & Differentialquotient wichtige
 Rollen. Neu hinzu kommt ein anderer Gesichtspunkt,
 der viel allgemeiner gefaßt werden kann und daher
 auch viel weiter tröpt [vgl. vor allem 3. Teil der VO]

Die Ableitung als lineare Bestapproximation
 an die Funktion

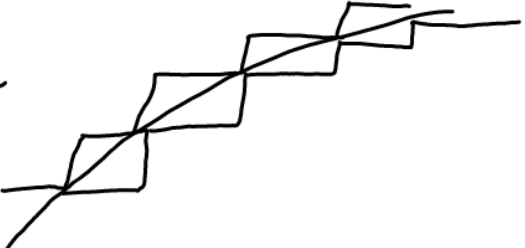
Wir klären das Verhältnis der Differenzierbarkeit zur Stetigkeit und leiten die „schulbekannt^①“ Ableitungsregeln her um damit die wichtigsten Funktionen zu differenzieren.

- (ii) Desweiteren lernen wir in §2 die wichtigsten Sätze über differenzierbare Funktionen kennen: den Mittelwertsatz der Differentialrechnung - eines der Hauptresultate der VO, Kriterien für (lokale) Extremstellen und die De L'Hospital - Regeln - die letzteren sicher auch „schulbekannt“.

① „schulbekannt“ in Analogie zu omdsbekannt.

0.5 Weiterer Ausblick auf die Vorlesung

(i) In Kapitel 14] befassen wir uns gründlich mit der Integralrechnung. Wir lernen das Riemann-Integral kennen. Hier wird der Grenzwertbegriff verwendet um eine Eigenschaft einer Fkt im Großen zu definieren: Eine Fkt heißt integrierbar, wenn sie sich gut zwischen Treppenfkt „einzwickeln“ lässt.

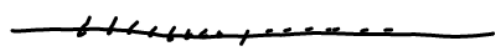
Die Brücke zwischen Differential- und Integralrechnung schlägt 
der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.


Er ermöglicht nicht nur das konkrete Berechnen von Integralen und somit Flächen sondern verbindet lokale mit globalen Eigenschaften von Fkt. - vgl. 0.1


Wir lernen außerdem den Satz von Taylor kennen, der es erlaubt („schöne“) Fkt nur aus der Kenntnis ihrer höheren Ableitungen in einem einzigen Pkt zu rekonstruieren! - vgl. 0.1

(ii) Dieser Satz wird uns dazu führen Folgen (und auch Reihen) von Funktionen zu studieren.

Das sind Folgen, deren einzelnen Glieder nicht reelle Zahlen sind, sondern Funktionen $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 Diese studieren wir in Kap. 15]


 Folge in \mathbb{R}


 Folge in \mathbb{C}


 Folge von Funktionen

Wir lernen Konvergenzbegriffe für solche Folgen kennen und betrachten spezielle

Funktionsreihen: Potenzreihen & Fourier-Reihen.

Verallgemeinerung von Polynomen

Approximation von periodischen Funktionen

(„Signale“) in Grund- und Oberschwingungen; sehr wichtig in Anwendungen

§1 DIFFERENZIERBARKEIT & ABLEITUNG

1.1 MOTIVATION (Änderungsverhalten von Funktionen)

(i) Wir haben im Verlauf der EDA öfters gesehen, dass es bei der Untersuchung von Funktionen weniger darauf ankommt, ihre Werte an vorgegebenen Stellen zu kennen als vielmehr die

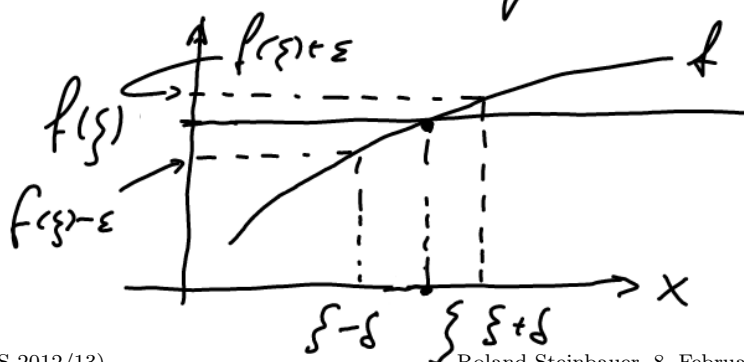
Veränderung der Funktionswerte bei Veränderungen des Arguments.

Zwei dieser „Änderungsmodi“ haben wir schon kennen gelernt: Monotonie [12] 2.17] & Stetigkeit [12] §1]

(ii) Erinnern wir uns an die Definition der Stetigkeit [12] 1.6] für eine Fkt $f: \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt

$$\xi \in D: \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

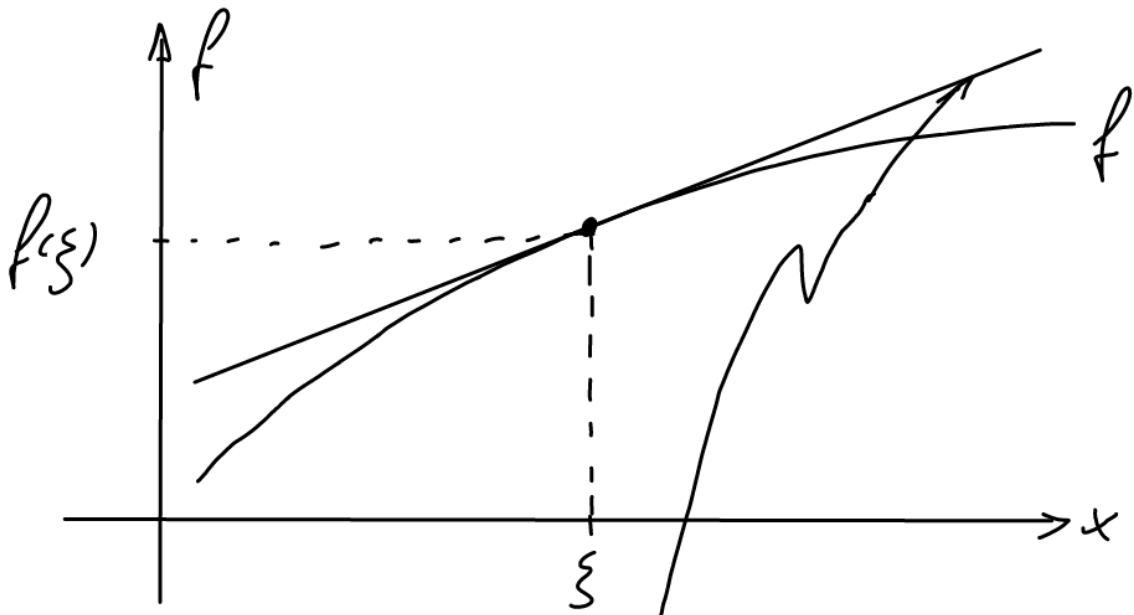
Stark vereinfacht bedeutet das, dass sich f nahe ξ wie die konstante Funktion $x \mapsto f(\xi)$ verhält.



(iii) Dem Begriff der Differenzierbarkeit einer Fkt $f: \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ können wir uns [unter vielen alternativen Zugängen? siehe auch später] auf ähnliche Weise nähern, die etwas auch ein beliebiger Zugang der Schulmathematik ist:

Wir werden f bei $\xi \in D$ differenzierbar nennen, wenn f „in der Nähe“ von ξ „sehr gut“ durch eine Gerade approximiert werden kann. (*)

Diese Gerade ist dann natürlich die Tangente [des der Schulmathematik].



approximierende Gerade,
Tangente bei $(\xi, f(\xi))$

Um die Idee (*) zu präzisieren und in eine offizielle Def gießen zu können, müssen wir sie zunächst etwas formaler ausdrücken:

Die approximierende Gerade hat - so wie jede Gerade - die Form

$$(**) \quad g(x) = \alpha x + \beta \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{"y-Abschnitt"} \\ \text{Anstieg} \end{array}$$

Außerdem passiert g den Punkt $(\xi, f(\xi))$, d.h.

$$f(\xi) = g(\xi) = \alpha \xi + \beta. \quad (***)$$

Daher ergibt sich in Punkten $x = \xi + h$

$$g(x) = g(\xi + h) \stackrel{(***)}{=} \alpha(\xi + h) + \beta = \alpha \xi + \beta + \alpha h \stackrel{(***)}{=} \underbrace{f(\xi)} + \alpha h$$

Im Sinne unserer Approximations-Idee (*) bedeutet das, dass für x „nahe bei“ ξ (d.h. für „kleine“ h)

$$\underbrace{f(x)} \approx \underbrace{f(\xi + h)} \approx \underbrace{g(\xi + h)} = \underbrace{f(\xi)} + \alpha h \quad (\Delta)$$

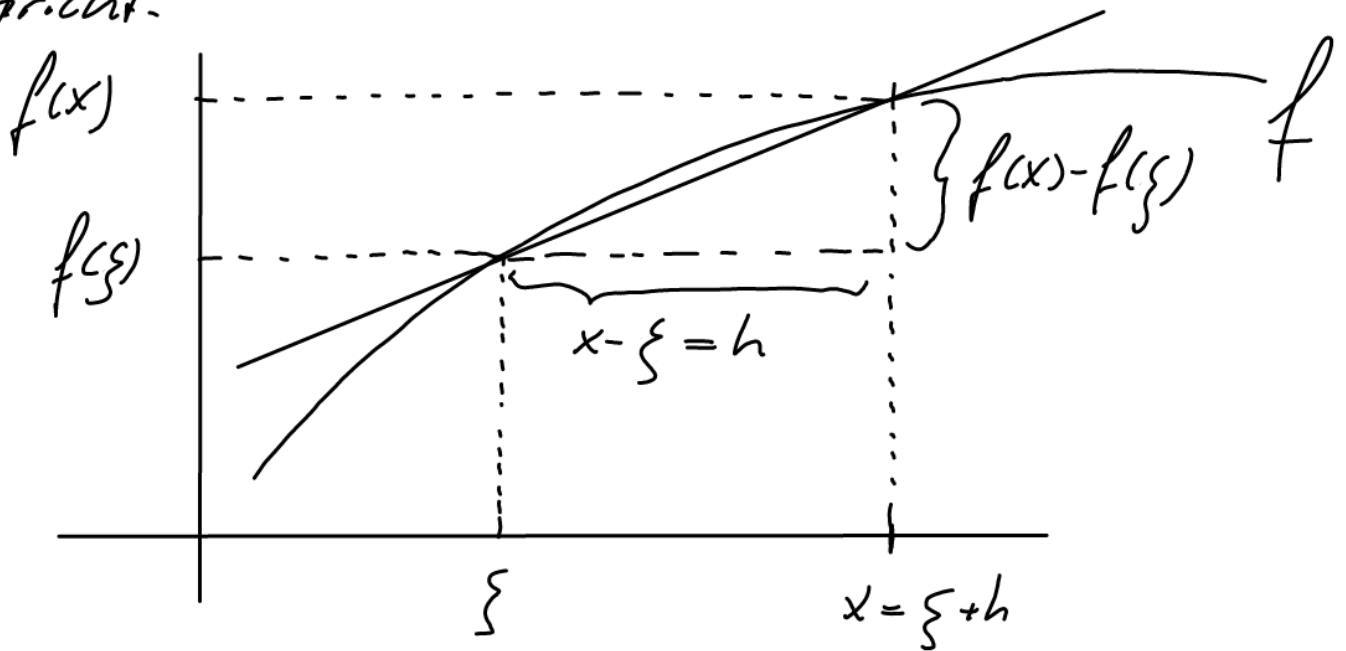
gilt.

Noch bevor wir (Δ) präzise fassen, können wir es verwenden, um den noch unbekanntem Anstieg α der approx. Geraden g zu bestimmen, nämlich

$$\alpha \approx \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Diesen Ausdruck werden wir als Differenzenquotient bezeichnen. Seine graphische Bedeutung ist,

dass er der Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(\xi, f(\xi))$ und $(\xi+h, f(\xi+h)) = (x, f(x))$ entspricht.



(iv) Der weitere Weg der Präzisierung von $(*)$ ist nun vorgezeichnet. Um der Idee $(*)$ gerecht zu werden müssen wir uns mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten

sonst Sinn los!

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

befassen, bzw. untersuchen, ob er überhaupt existiert.

1.2 DEF (Differenzenquotient) - Jetzt offiziell:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $\xi \in I$ fix. Für $I \ni x \neq \xi$ heißt der Ausdruck $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ Differenzenquotient von f bei ξ .

1.3 BEM (2 Variablen) Formel hat der Differenzenquotient den Nachteil, dass er von 2 Variablen, nämlich ξ und x abhängt. Wie in 1.1 (iv) angesautet wollen wir die Abhängigkeit von x durch Übergang zum Limes $x \rightarrow \xi$ loswerden, wobei der Differenzenquotient in die Tangentensteigung übergehen sollte.

die 2 Pläte, die die Sekante fellepen

Um diesen Limes (von Fkt!) sauber durchzuführen zu können, wieder holen wir

1.4 DEF (Limes von Fkt auf Intervallen; Spezialfall von [2] 1.21)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $\xi \in I$

Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = c,$$

(damit automatisch BP, [1] 3.28(ii))

$c \in \mathbb{R}$, das auch $\pm \infty$

falls für jede Folge $(x_n)_n$ in I mit $x_n \rightarrow \xi$ gilt, dass $f(x_n) \rightarrow c$.

1.5 BEM (Technisches Detail) Wir haben in 1.1 (iv) gesehen, dass im Differenzenquotienten $x = \xi$ sinnlos ist und diesen Fall daher auch in Def 1.2 ausgeschlossen. Andererseits erlaubt Def 1.4 explizit auch die Folge $x_n = \xi \forall n$ [konvergiert je trivialerweise, vgl. [1] 2.11 (ii)].

Doch müssen wir im Folgenden bei $\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$
 immer die konstante Folge $x_n = \xi$
 explizit verbieten und schreiben $\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}}$ oder $\lim_{\substack{\xi \neq x \rightarrow \xi}}$

Warnung: Manche Quellen [z.B. Heuser] verbieten in
 der Def für Konvergenz von Funktionen $x_n = \xi$. Daher
 muß bei der Differenzierbarkeit $x_n = \xi$ nicht
 ausgeschlossen werden. Dafür sind einige Details
 im Zusammenhang mit Limiten von Fkt anders zu
 handhaben? Jetzt aber los!

1.6 DEF (Differenzierbarkeit & Ableitung)

Schlüssel-
Def

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Fkt.

(i) Sei $\xi \in I$. Die Fkt f heißt differenzierbar an der
 Stelle ξ [diffbar in ξ], falls

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \quad \text{oder, was dasselbe ist,} \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

existiert und endlich ist. [d.h. kein ungenügl. Grenzwert erlaubt!]

Diesen Grenzwert nennen

Grenzwert erlaubt!

Wir die Ableitung von f in ξ und schreiben

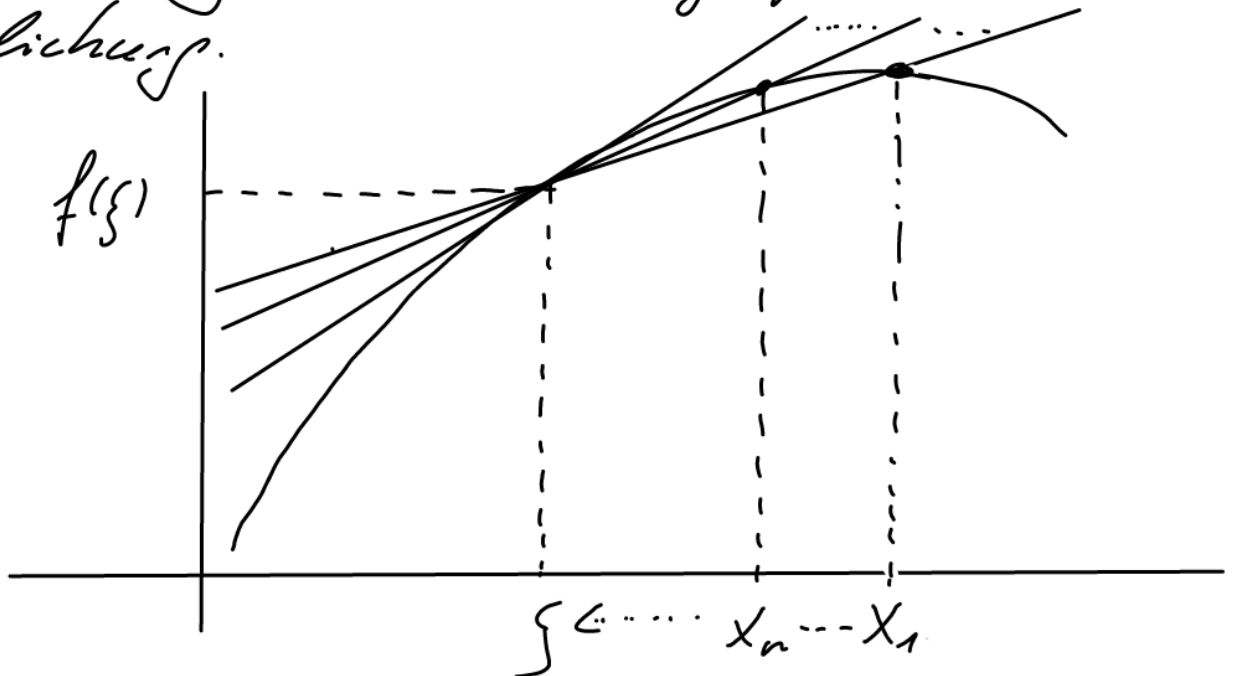
$$\{ f'(\xi) \}$$

(ii) Ist f differenzierbar in allen Punkten $\xi \in I$,
dann heißt f differenzierbar auf I oder einfach differenzierbar.

1.7 BEW (Zur Bedeutung von Def 1.6 & einseitige Ableitung)

(i) Falls der Limes in 1.6 (i) existiert und endlich ist, gilt tatsächlich wie in 1.1 (iii) antizipiert, dass die Ableitung (an der Stelle ξ) gleich dem Limes des Differenzenquotienten (an der Stelle ξ) ist.

Geometrisch ergibt sich die Ableitung also als der Grenzwert der Sekantensteigungen und kann somit als die Steigung der Tangente im Punkt ξ an der Graphen von f interpretiert werden. Zu dieser Lösung des sog. Tangentenproblems unten [1.10] mehr. Jetzt noch eine graphische Veranschaulichung.



(ii) Bisher haben wir supponiert immer $x > \xi$ geteilt.
 Das dient aber nur der Veranschaulichung.
 Klareweise sind in der Def 1.6 (ii) resp 1.4
 auch Folgen erlaubt, die von links/unten
 gegen ξ konvergieren - ebenso wie Folgen
 die "hin- und herspringen".

$$\frac{x_2 x_3 \dots x_n x_1}{\dots}$$

[Nach Def 1.4 & 1.6 sind alle Folgen $\{$
 $(x_n)_n$ in \mathbb{I} erlaubt mit $x_n \neq \xi, \forall n$ und $x_n \rightarrow \xi$]

(iii) Ist \mathbb{I} ein (wenigstens halb-) abgeschlossenes
 Intervall und ξ ein Randpkt von \mathbb{I} , dann
 kommen nur Folgen in Folge die von oben
 bzw unten gegen \mathbb{I} konvergieren. Man spricht
 dann von einseitigen Ableitungen. Natürlich
 können solche auch für innere Pkte eines beliebigen
 Intervalls betrachtet werden.

1.8 BSP (Höchste Zeit: Diffbare & nichtdiffbare Fkt.)

(i) Konstante Fkt sind (überall) diffbar mit Abl = 0

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c \quad \forall x$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

(ii) Potenzfkt sind diffbar. Sei $c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Wir betrachten $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = cx^n$

Es gilt

$$1 \quad \underline{f'(x)} = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{c(x+h)^n - cx^n}{h} = c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\text{(BLS)} = c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h}$$

$$= c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h}$$

$$= c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} \right)$$

$$= c \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} \right)$$

$$= \underline{c n x^{n-1}}$$

Insbesondere gilt also

• (Geraden) $f(x) = cx$, $f'(x) = cx^0 = c$

• $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

(iii) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 1/x$

(dh auf dem ganzen Defber.
 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)
 ist überall differenzierbar und $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Tatsächlich gilt

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{x - (x+h)}{x(x+h)}$$

$$= \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

(iv) Die Exponentialfkt ist auf $\text{pont } \mathbb{R}$ diffbar und gleich ihrer Ableitung, denn

$$\boxed{\exp' = \exp}$$

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \stackrel{[1] 4.3P}{=} \exp(x) \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} \stackrel{[2] 3.8(viii)}{=} \exp(x).$$

(v) Die Winkelfkt \sin & \cos sind diffbar auf \mathbb{R} und es gilt

$$\left. \begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x) \end{aligned} \right\}$$

Tatsächlich gilt für den Sinus

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \stackrel{[2] 3.17(i)}{=} \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x+h/2) \sin(h/2)}{h}$$

$$= \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \underbrace{\cos(x+h/2)}_{\substack{\text{cos stetig [2] 3.17(ii)} \\ \rightarrow \cos(x) \quad (h \rightarrow 0)}} \underbrace{\frac{\sin(h/2)}{h/2}}_{\substack{\rightarrow 1 \quad [2] 3.17(vi)}}$$

$$\stackrel{[1] 2.23}{=} \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \cos(x+h/2) \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = \underline{\cos(x)}$$

Der Cosinus-Fall lässt sich analog erledigen \leadsto [UE].

(vi) Der Absolutbetrag $\text{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist diffbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ aber nicht diffbar in $x=0$

Tatsächlich gilt für

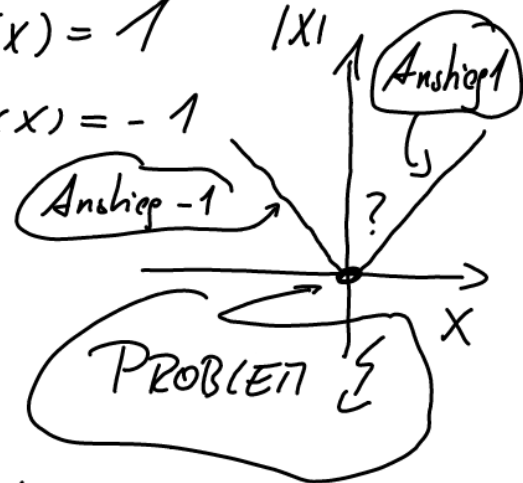
$$x > 0 : \text{abs} = \text{id} \stackrel{\text{(ii)}}{\Rightarrow} \text{abs}'(x) = 1$$

$$x < 0 : \text{abs} = -\text{id} \stackrel{\text{(ii)}}{\Rightarrow} \text{abs}'(x) = -1$$

Aber $\text{abs}'(0)$ existiert nicht, denn sei $h_n = (-1)^n/n$, dann gilt $h_n \rightarrow 0$ aber die Folge der Differenzenquotienten konvergiert nicht:

$$\frac{|0+h_n| - |0|}{h_n} = \frac{1/h_n}{(-1)^n 1/h_n} = (-1)^n \quad \text{div [1] 2.11 (iii)}$$

[Die Folge (h_n) ist natürlich so gewählt, dass sie abwechselnd Differenzenquotienten ± 1 produziert ...]



1.8 BEM ((Nicht)-diffbare Fkt)

(i) Bemerke, dass abs in $x=0$ zwar stetig ist [1] 1.2 (iv) aber eben nicht diffbar!

(ii) In gewisser Weise ist der Knick von abs bei $x=0$ ein Prototyp einer nicht-Differenzierbarkeit - etw. wie Sprünge Prototypen für Unstetigkeiten sind [vgl. [2] 1.8 (v) oder auch [2] 1.15 ?] Aber auch hier

ist die punktweise Wahrheit komplizierter. Es gibt also Fkt, die auf ganz \mathbb{R} stetig aber nirgends diffbar sind, z.B. die Weierstraß-Fkt $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin(2^k x)}{3^k}$. [Topologisch gesehen gibt es sogar viele solche Fkt - sie liegen dicht in den stetigen.]

(iii) Das "Problem" von obs bei $x=0$ löst sich mittels einseitiger Ableitungen [1.7(iii)] genauer analysieren.

Offensichtlich gilt

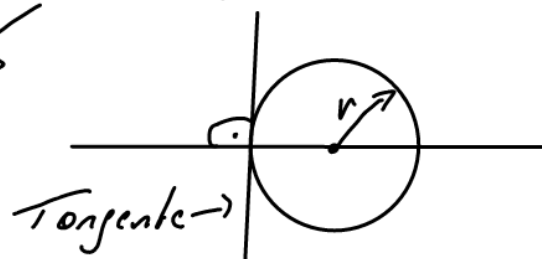
Exakte Bsp. 2.4(iii) $\rightarrow \lim_{h \searrow 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = 1, \quad \lim_{h \nearrow 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = -1,$

sodass die einseitigen Ableitungen bei $x=0$ existieren und ± 1 ergeben.

1.10 BEM (Historische Bemerkung 1: Tangentenproblem)

Die grundlegende Problemstellung der Differentialrechnung war seit der Antike unter dem Namen Tangentenproblem bekannt: Finde die Tangente in einem Punkt o an eine beliebige Kurve.

Dabei ist zunächst das Problem, wie überhaupt die Tangente an eine beliebige Kurve zu definieren ist, d.h. wie man von einfachen Spezialfällen wie z.B. den Kreis zu einer guten Verallgemeinerung gelangen soll/kann. Ein zunächst



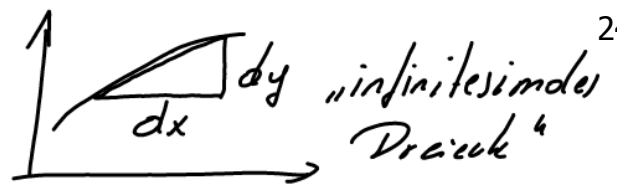
naheliegender Ansatz ist es, die Tangentensteigung durch die Sekantensteigungen anzunähern – also unsere Idee (*) aus 1.1(iii). Was wir in Def 1.6(ii) locker mit dem Grenzwertbegriff erledigt haben, stellte die MathematikerInnen bis vor ~300 Jahren vor gewaltige technische Probleme.

Noch früheren Ansätzen von P. Fermat [~1600-1665] und R. Descartes [1596-1650] gelang es Ende des 17. Jh. unabhängig voneinander Gottfried Wilhelm Leibniz [1646-1716] und Isaac Newton [1643-1727] funktionierendes Kalküle zu entwickeln.

Für Leibniz war dabei die Tangentensteigung die Steigung der Hypothenuse in einem „unendlich kleinen“ Dreieck, das sich im Grenzfall aus den Sekantendreiecken ergibt. Tatsächlich rechneten die MathematikerInnen bis weit ins 19. Jahrhundert mit solchen, schwer fassbaren „unendlich kleinen Größen“, ehe der moderne Grenzwertbegriff geprägt wurde. Aus dieser Anfangszeit der Differentialrechnung hat bis heute eine Schreibweise überlebt:

Betrachten wir eine Funktion mit y (wie früher oft üblich), etwa $y = x^3 + 2x^2 + 7$, dann schreibt man für die Ableitung statt y' auch manchmal

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x.$$



Leibniz hat sich dabei $\frac{dy}{dx}$ wohl wirklich ob dem Quotienten aus Gegenkathete (dy) und Ankathete (dx) vorgestellt, wobei dx und dy „unendlich klein“ sind.

Der moderne Grenzwertbegriff erspart es uns mit dieser, eine gewisse „richtige“ Anschauung voraussetzenden „unendlich kleinen Größen“ hantieren zu müssen. Es gibt aber auch einen um die Mitte des 20. Jh. von A. Robinson [1918-74] u.o. entwickelten Zugang zur Analysis, der einen rigorosen Umgang mit „unendlich kleinen“ (und „unendlich großen“) Größen ermöglicht. Dieses math. Teilgebiet heißt Nichtstandard Analysis.

1.11 Bern (Historische Bem 2: Newtonsche Mechanik)

Isaac Newton ging einen etwas anderen Weg als Leibniz. In seinem Hauptwerk, der „Principia Mathematica“ - einem der einflussreichsten Bücher überhaupt - hat er gezeigt, dass wesentliche Phänomene in der Natur erfolgreich durch math. Modelle beschrieben werden können. Dazu entwickelte er eine Differential- und Integralrechnung, wobei er vom Problem der

Momentangeschwindigkeit ausging:

Ein Massenpunkt P bewegt sich auf der Zahlenstrahl.
Seinen Ort zum Zeitpunkt beschreiben wir mit der
Funktion $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto s(t)$. Unsere Anschauung
drängt uns dazu, zu plaudern, dass P zu jedem Zeit-
punkt eine Momentangeschwindigkeit hat. Tatsäch-
lich bestimmbar sind aber nur Durchschnittsge-
schwindigkeiten zwischen den Zeitpunkten t_0 und t ,

also

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

(auch
mittlere
Geschw.)

In völliger Analogie zum Tangentenanschlag können
wir die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ zum Zeitpunkt
 t_0 als den Grenzwert dieser Durchschnittsgeschw. definieren
- falls dieser existiert, d.h. dass die Durchschnitts-
geschw. genügend "stabil" sind, falls t "in der Nähe"
von t_0 variiert. Also

$$v(t_0) := \lim_{t_0 \neq t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \quad [\text{falls existent}]$$

Zum Bsp. gilt für den freien Fall $s(t) = \frac{1}{2} g t^2$
und daher

$$\underline{v(t)} = \left(\frac{1}{2} g t^2 \right)' = \underline{g t}$$

(1.8.100)

Erdbeschleunigung
 $\sim 9.81 \text{ m/s}^2$

Wie auch schon aus der Notation ersichtlich, ist die Momentangeschw. v selbst eine Funktion der Zeit t ; also $t \mapsto v(t)$. Die mittlere Beschleunigung von P zwischen t_0 und t ist definiert als der Differenzenquotient

$$\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

und ganz ähnlich zur Momentangeschw. definieren wir die Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t_0 als

$$b(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \quad [\text{falls ex.}]$$

Für den freien Fall ergibt sich also

$$\underline{b(t)} = v'(t) = (g \cdot t)' = \underline{g},$$

was auch den Namen der Konstanten g erklärt.

Erst diese präzisen Definitionen von Momentangeschw. und -beschleunigung ermöglichen einen analytischen Zugriff auf Newtons Kraftgesetz (2. Newtonsches Axiom)

1 Kraft = Masse · Beschleunigung

nämlich

$$F(t) = m \cdot v'(t) = m \cdot s''(t)$$

Klassische
Mechanik
in der
Physik

1.12 ZET (Diffbarkeit vs Stetigkeit)

Bsp 1.8vii zeigt, dass die Stetigkeit einer Fkt f im Pkt ξ nicht die Differenzierbarkeit von f in ξ impliziert. Die Umkehrung ist aber richtig, wie das nächste Thm zeigt. Insbesondere gilt also für $f: I \rightarrow \mathbb{R}, \xi \in I$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ diffbar in } \xi \implies f \text{ stetig in } \xi \\ f \text{ stetig in } \xi \not\implies f \text{ diffbar in } \xi \end{array} \right.$$

1.13 Thm (diffbar \implies stetig) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Falls f differenzierbar in $\xi \in I$ ist, dann ist f in ξ auch stetig.

Beweis. Sei $I \ni x \neq \xi$, dann gilt lt. Voraussetzung

$$f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \underset{(x \rightarrow \xi)}{\longrightarrow} f'(\xi) \cdot 0 = 0,$$

also $f(x) \rightarrow f(\xi)$ und mit [2] Prop 1.26 folgt dass f stetig in ξ ist.



1.14 MOTIVATION (Weiteres Vorgehen)

Ein wichtiger Aspekt beim Studium neuer Begriffe - hier Differenzierbarkeit - ist es immer, möglichst viele (Klassen von) Beispielen und Nicht-Beisp zu finden.

Um dabei nicht immer auf die Def zurückgreifen zu müssen, werden wir hier wie in [2] §1 in Folge der Stetigkeit ein „Baukastensystem“ etablieren [vgl. [2] 1.16] und uns darum kümmern, ob die Grundoperationen für Fkt ([1] 1.3) die Differenzierbarkeit erhalten. Ganz mühelos werden wir dabei die aus der Schulmathematik bekannten Differentiationsregeln (wieder-) entdecken.

Mühsam

1.15 PROP (Grundops & Diffbarkeit - Differentiationsregeln)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\xi \in I$ und $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in ξ . Dann gilt

(i) (Linearkombinationen) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda f + \mu g$ diffbar in ξ und es gilt

$$\left\{ (\lambda f + \mu g)'(\xi) = \lambda f'(\xi) + \mu g'(\xi) \right\}$$

(ii) (Leibniz- oder Produktregel) $f \cdot g$ ist diffbar in ξ und es gilt

$$\left\{ (f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) \right\}$$

(iii) (Quotientenregel) Falls $p(\xi) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{p}$ diffbar in ξ und es gilt

$$\left\{ \left(\frac{f}{p} \right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)p(\xi) - f(\xi)p'(\xi)}{p(\xi)^2} \right.$$

Beweis: (i) folgt sofort aus den Grenzwertsätzen [1] 2.25 [UE]

(ii) Sei $0 \neq h$ mit $\xi+h \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(\xi+h)p(\xi+h) - f(\xi)p(\xi)}{h} &= \frac{1}{h} \left(f(\xi+h)(p(\xi+h) - p(\xi)) + (f(\xi+h) - f(\xi))p(\xi) \right) \\ &= f(\xi+h) \frac{p(\xi+h) - p(\xi)}{h} + \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} p(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{0 \neq h \rightarrow 0} f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(\xi) \\ &\xrightarrow{[1] 2.25} \end{aligned}$$

f stetig in ξ [1.13]

(iii) Sei zunächst $f(x) \equiv 1$ auf I . Für $0 \neq h$ mit $\xi+h \in I$ gilt

$$\frac{\frac{1}{p(\xi+h)} - \frac{1}{p(\xi)}}{h} = \frac{p(\xi) - p(\xi+h)}{h p(\xi)p(\xi+h)} \xrightarrow{[1] 2.23 \& 2.26} - \frac{g'(\xi)}{p(\xi)^2}$$

1.13

also $\left[\left(\frac{1}{p} \right)'(\xi) = - \frac{p'(\xi)}{p^2(\xi)} \right]$

(*) auch
unbedingt
wichtig!

Der allgemeine Fall folgt nun aus (ii)

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(\xi) \stackrel{(ii)}{=} f'(\xi) \frac{1}{g}(\xi) + f(\xi) \left(\frac{1}{g}\right)'(\xi) \\ &\stackrel{(*)}{=} f'(\xi) \frac{1}{g}(\xi) - f(\xi) \frac{g'(\xi)}{g^2(\xi)} \\ &= \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} \end{aligned}$$

]

1.16 Bsp (Werte diffbare Fkt)

Obwohl im Sinne von 1.14 wenden wir nun 1.15 an und hoffen reiche Ernte!

(i) (Einfache rationale Fkt)

kein Intervall aber Vereinigung
zwei Intervalle

Sei $n \geq 1$ und $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1/x^n$,

dann gilt wegen 1.15(iii) $[1/x^n \neq 0 \ \forall x \neq 0]$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' \stackrel{1.8(ii)}{=} \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

d.h. $(x^{-n})' = -n x^{-n-1}$

oder auch (*)
im Beweis von
1.15(iii) - was ist
ein einfacher
Spezialfall ist

(ii) $\tan: \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi\mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist diffbar und

es gilt

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'}_{\substack{\text{3.25 (ii)} \\ \text{1.15 (iii)} \\ \text{1.8 (v)}}} &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \end{aligned}$$

(iii) Polynome und rationale Fkt sind überall diffbar. [Details UE]

1.17 MOTIVATION (Differentiation als lineare Approximation)

Bereit wir unser Bookkostensystem aus 1.15 [vgl. 1.14] erweitern (können) werfen wir noch einen weiteren Blick auf den Begriff der Differentiation - diesen Gesichtspunkt der

Ableitung als lineare Approximation an die ursprüngliche Funktion

haben wir schon in 1.1 (iii) angedeutet. Aber

Achtung: Obwohl er in der Schulmathematik

↪ eine untergeordnete Rolle spielt, ist er der in der Mathematik insgesamt bestimmende Aspekt des Begriffs der Differentierbarkeit!

Er ermöglicht - im Gegensatz zum Zugang mittels Differenzenquotient - weitreichende Verallgemeinerungen

nerungen und ist sozusagen der Kern der Sache.

Wir beginnen mit einer einfachen Umformulierung von Bekanntem.

1.18 BEW (Differentialquotient vs. lin. Approx.)

(i) Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in I$ mit $f'(\xi) =: a \in \mathbb{R}$.
Dann gilt nach Def 1.6 (i)

$$0 = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - a = \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - ah}{h} \quad (*)$$

Das kann man nun aber auch so interpretieren:

Die lineare Funktion $h \mapsto a \cdot h$ ist (im Sinne von $(*)$) eine Approximation der Fkt $h \mapsto f(\xi+h) - f(\xi)$; mehr dazu in 1.20 unten.

(ii) Umgekehrt ang $\exists a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $(*)$ d.h.

$$\lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - ah}{h} = 0,$$

dann gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(\xi+h) - f(\xi)) = a$ und somit ist f in ξ diffbar mit $f'(\xi) = a$

Insgesamt haben wir also gezeigt

$$(iii) \left\{ f \text{ diffbar in } \xi \iff \exists a \in \mathbb{R}: \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - ah}{h} = 0 \right\}$$

und in diesem Fall ist $f'(\xi) = 0$.

Eine auch praktisch besser verwendbare Weiterführung dieser Idee hatten wir als Thm fest.

1.19 THM (Differenzierbarkeit mittels lin. Approx.)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Fkt auf einem Intervall und sei $\xi \in I$. Dann gilt

f diffbar in $\xi \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \exists \text{Fkt } r: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ sodass}$
 $f(\xi+h) - f(\xi) = \alpha \cdot h + r(h)$

$$\text{und } \lim_{0 \neq h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

In diesem Fall gilt $f'(\xi) = \alpha$.

1.20 BEM (zur Bedeutung von Thm 1.19)

(i) Um die Bedeutung von 1.19 besser zu verstehen definieren wir das Inkrement der Fkt f bei ξ

$$\text{oder } \varphi(h) = f(\xi+h) - f(\xi).$$

Dann besagt 1.19 im Fall der Diffbarkeit, dass

$$\varphi(h) = f'(\xi) \cdot h + r(h),$$

Zunahme von f zwischen ξ u. $\xi+h$

d.h. dass das Inkrement bis auf einen "Fehler" $r(h)$ proportional zur Zunahme der unabhängigen Variablen ist - der Proportionalitätsfaktor ist genau $f'(\xi)$

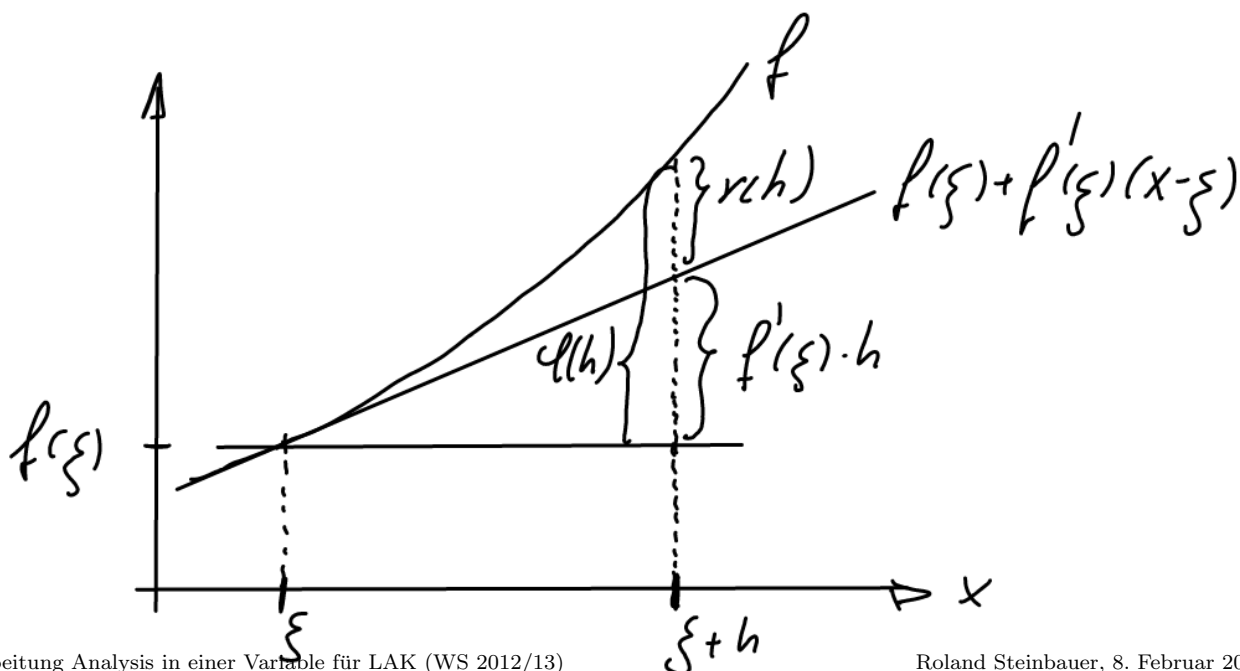
$$\varphi(h) = f(\xi+h) - f(\xi) \approx f'(\xi) \cdot h$$

Oder noch anders: Die Inkrementfunktion $h \mapsto \varphi(h)$ wird bis auf den "Fehler" $r(h)$ durch die lineare Fkt $h \mapsto f'(\xi) \cdot h$ approximiert.

(ii) Geometrisch bedeutet das nichts anderes als [vgl. 1.1 ciii)] dass die Tangente an f im Pkt ξ definiert ab

$$g(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$$

im präzisen Sinne von 1.1P für x nahe ξ (d.h. für kleine h) eine gute Approximation ist [weil 1.1P sagt ja

$$f(\xi+h) = f(\xi) + f'(\xi)h + r(h). \quad]$$


(iii) Besondere Beachtung verdient auch das Verhalten des „Fehlers“ r [r für Rest].
 Diese erfüllt nicht nur $r(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$)
 sondern sogar $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$)

Oft schreibt man dafür auch $r(h) = o(h)$

klein $o(h)$ von h

(iv) Damit sieht man auch besonders schön, dass
 [oder sogar worin] Diffbarkeit stärker ist als
 Stetigkeit [vgl. 1.12]. Es gilt ja [12] 1.26

$$f \text{ stetig in } \xi \Leftrightarrow f(\xi+h) - f(\xi) \rightarrow 0$$

nur das
& nicht
mehr

Wählen wir also irgendein $\alpha \in \mathbb{R}$ und schreiben

$$f(\xi+h) - f(\xi) = \alpha \cdot h + r(h) \quad [\text{d.h. } r(h) := f(\xi+h) - f(\xi) - \alpha h]$$

dann gilt

$$f \text{ stetig in } \xi \Leftrightarrow r(h) \rightarrow 0$$

und es ist keine Rede von $\frac{r(h)}{h} \rightarrow 0$ oder
 davon, dass α eindeutig bestimmt ist – was ja
 aus dem Satz in 1.19 folgt. [siehe auch UE]

Nach diese langen Bem zum eigentlich kurzen

Beweis von 1.19

" \Rightarrow ": Setze $r(h) = f(\xi+h) - f(\xi) - f'(\xi)h$. Für $0 \neq h$ mit $\xi+h \in I$ gilt dann

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - f'(\xi) \xrightarrow{(h \rightarrow 0)} f'(\xi) - f'(\xi) = 0$$

" \Leftarrow ": Sei wieder $0 \neq h$ mit $\xi+h \in I$. Laut Voraussetzung gilt

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = a + \frac{r(h)}{h} \rightarrow a + 0 \quad (h \rightarrow 0),$$

also ist f diffbar in ξ mit $f'(\xi) = a$



1.21 Bsp (Der Sinus bei 0)

Wir veranschaulichen die Situation von 1.19 am Bsp der Sinusfkt: $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$1.8 (v) \Rightarrow \sin'(x) = \cos(x) \Rightarrow \sin'(0) = \cos(0) \stackrel{[2] 3.22(ii)}{=} 1 \quad (*)$$

$$1.19 \stackrel{\xi=0}{\Rightarrow} \sin(h) = \sin(0+h)$$

$$= \sin(0) + \sin'(0) \cdot h + r(h)$$

$$\stackrel{[2] 3.22(ii)}{(*)} = 0 + h + r(h)$$

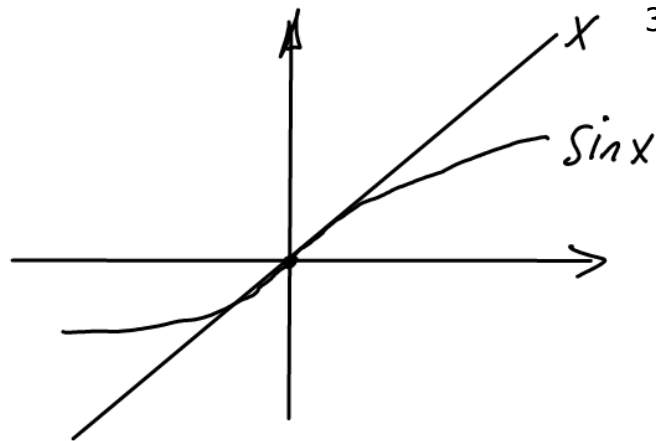
$$= h + r(h)$$

$$\text{mit } r(h) = \sin(h) - h = o(h)$$

das wissen wir im übrigen auch schon aus [2] 3.17 (vi)

$$\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$$

Graphisch bedeutet das, dass \sin nahe 0 wie id aussieht.



1.22 MOTIVATION (Zurück zum Boukosten)

Jetzt kehren wir endlich wieder zu unserem Boukostensystem zurück und erweitern ihn. Prop 1.15 hat ja schon ein paar gebracht [siehe auch UE], aber zum großen Glück fehlt uns noch die Verträglichkeit der Differentiation mit der Verknüpfung [vgl auch 12] 1.17(ii) im Fall der Stetigkeit]. Sie wird uns auch die Tür zur Differentiation der Umkehrfunktion öffnen. Kurz gesagt, wir marschieren in Richtung Kettenregel und Inversenregel - dabei können wir die Post-schreibweise aus 1.18 gleich gut gebrauchen [müssten wir aber nicht verwenden vgl. [Hö], Beweis von Thm 7.9]

1.23 THM (Kettenregel) Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und seien $f: I \rightarrow \mathbb{R}, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Fkt sodass $f(I) \subseteq J$.

Ist f diffbar in $\xi \in I$ und ist g diffbar in $\eta := f(\xi) \in J$, dann ist die Verknüpfung $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar in ξ und

Sonst ist die Verknüpfung nicht def. vgl. [2] 1.3(ii)

es gilt

$$(g \circ f)'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$$

1.24 BEW (Zur Kettenregel)

(i) (Schreibweise) In der Leibniz'schen Schreibweise hat die Kettenregel die folgende suggestive Form

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{d\xi}$$

Wobei hier g mittels Verknüpfung mit f (obwohl von ξ zu verstehen ist, also $g(\xi) := g \circ f(\xi)$).

(ii) (Beweisidee für 1.23) Folgende (einfache & brutale) Beweisstrategie/Rechnung ist naheliegend:

Sei $\xi \neq x \in I$, dann gilt

$$\frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi} = \frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{f(x) - f(\xi)} \cdot \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Dieser Ausdruck muss ja berechnet werden

Trick?

$$\rightarrow g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$$

Das Problem dabei ist aber, dass $f(x) - f(\xi) = 0$ gelten könnte. Somit ist der Trick zwar nett, funktioniert aber nicht unmittelbar? Er kann direkt reperiert werden (siehe [Ho, 7.9]) oder man kann (wie wir es gleich tun werden) das Problem mittels der Rest-Schreibweise aus 1.19 umgehen.

Beweis von 1.23. Wir verwenden 1.18 um die Voraussetzung umzuschreiben (h, k sodass $\xi+h \in I, \eta+k \in J$)

$$f \text{ diff'bar in } \xi \stackrel{1.18}{\implies} f(\xi+h) - f(\xi) = f'(\xi)h + r_1(h) \quad \text{mit } (*)$$

$$\rho_1(h) := \frac{r_1(h)}{h} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

$$g \text{ diff'bar in } \eta \stackrel{1.18}{\implies} g(\eta+k) - g(\eta) = g'(\eta)k + r_2(k) \quad \text{mit } (**)$$

$$\rho_2(k) := \frac{r_2(k)}{k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow 0)$$

Daraus folgt

$$g \circ f(\xi+h) - g \circ f(\xi) = g(f(\xi+h)) - g(f(\xi))$$

Dieser Ausdruck
drehen wir
mit 1.18
umzuschreiben

$$k = f(\xi+h) - f(\xi)$$

$$\stackrel{(**)}{=} g'(\eta) (f(\xi+h) - f(\xi)) + r_2(f(\xi+h) - f(\xi))$$

$$\stackrel{(*)}{=} g'(\eta) (f'(\xi)h + r_1(h)) + r_2(f'(\xi)h + r_1(h))$$

$$= g'(\eta) f'(\xi) h + r(h), \quad (***)$$

wobei

$$r(h) = g'(\eta) r_1(h) + r_2(f'(\xi)h + r_1(h))$$

$$\stackrel{(*), (***)}{=} g'(\eta) \rho_1(h) \cdot h + \rho_2(f'(\xi)h + r_1(h)) \cdot (f'(\xi)h + r_1(h))$$

und daher

$$r(h)/h = \underbrace{g'(\eta) \rho_1(h)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\rho_2(f'(\xi)h + r_1(h))}_{\rightarrow 0} (f'(\xi) + \rho_1(h))$$

$$\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Nun folgt mit (der Rückrichtung von) 1.18, dass $g \circ f$ diffbar in ξ ist mit $(g \circ f)'(\xi) \stackrel{(\ast\ast\ast)}{=} g'(f(\xi)) f'(\xi)$. \square

1.25 Bem (Ableitung der Umkehrfkt) Seien I, J Intervalle.

Sei $f: I \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ eine reelle bijektive Fkt auf einem Intervall. Angenommen f ist diffbar in $\xi \in I$ und die Umkehrfkt $f^{-1}: J \rightarrow I$ (\exists weil f bijektiv) ist diffbar in $\eta = f(\xi)$. Wir können daher die Kettenregel in ξ anwenden auf

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_I \quad \left[\text{vgl. ETA 4.3.30} \right]$$

Das ergibt $(f^{-1} \circ f)'(\xi) \stackrel{1.23}{=} (f^{-1})'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) \stackrel{1.8 \text{iii)}}{=} \text{id}'(\xi) = 1 \quad (\ast)$

Insbesondere gilt also $f'(\xi) \neq 0$ und wir können (\ast) mit $\xi = f^{-1}(\eta)$ umschreiben zu

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}$$

Bemerkte, dass wir in dieser Aussage die Diffbarkeit von f^{-1} in η vorausgesetzt haben. Eine Möglichkeit die Diffbarkeit von f^{-1} oder der von f zu folgern lernen wir als nächstes kennen.

1.26 Erinnerung / Motivation (Umkehrfkt) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow f(I) =: J$ stetig und streng monoton. Dann besagt [2] Thm 2.18, dass J ein Intervall, f bijektiv und $f^{-1}: J \rightarrow I$ stetig & str. monoton ist.

Wir werden nun zeigen, dass dann aus der Diffbarkeit von f in $\xi \in I$ unter der Bedingung $f'(\xi) \neq 0$ schon die Diffbarkeit von f^{-1} in $\eta = f(\xi)$ folgt. Wegen 1.25 ist diese Bedingung auch notwendig?

1.27 THM (Diffbarkeit der Umkehrfkt)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf dem Intervall I . Ist f diffbar in ξ mit $f'(\xi) \neq 0$, dann ist die Umkehrfkt $f^{-1}: J := f(I) \rightarrow I$ diffbar in $\eta := f(\xi)$ und es gilt

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}$$

Beweis. Sei (η_n) eine Folge in $J \setminus \{\eta\}$ mit $\eta_n \rightarrow \eta$.

f bij. $\Rightarrow (\xi_n) := (f^{-1}(\eta_n))$ ist Folge in $I \setminus \{\xi\}$

f^{-1} stetig $\Rightarrow \xi_n \rightarrow \xi$

Daher gilt

$$\frac{f^{-1}(\eta_n) - f^{-1}(\eta)}{\eta_n - \eta} = \frac{\xi_n - \xi}{f(\xi_n) - f(\xi)} \xrightarrow{\substack{\text{diffbar in } \xi \\ f'(\xi) \neq 0, [1] 2.26}} \frac{1}{f'(\xi)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

und (wegen 1.6(ii), 1.4) ist f^{-1} diffbar in η mit Ableitung

$$(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi) = 1/f'(f^{-1}(\eta)).$$



1.28 BSP (Ableitung des Logarithmus und eine berühmte Formel)

(i) Die Logfkt ist diffbar auf $(0, \infty)$ [also auf ihrem ganzen Defbereich] und es gilt

[vgl. [2] 3.2]

$$\log'(x) = 1/x$$

Tatsächlich ist $\log = \exp^{-1}$ [2], 3.2(iii), so ist \log definiert! und \exp ist diffbar auf ganz \mathbb{R} [1.8(ii)] mit $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$ [11] 4.40(ii)]. Also können wir 1.27 anwenden und erhalten

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

(ii) Mittels (i) können wir die berühmte Formel

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

herleiten, die oft auch als Definition der Eulerschen Zahl verwendet wird. [Wir haben e ja als $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ definiert, vgl. [11] 4.37.]
Es gilt

$$1 \stackrel{(i)}{=} \log'(1) \stackrel{1.6(ii)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \frac{1}{n}) - \log(1)}{1/n}$$

$$\log(1) = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot \log(1 + \frac{1}{n}))$$

$$\stackrel{12] 3.3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\log(1 + \frac{1}{n})^n)$$

$$\log \text{step } 12] 3.22(ii) = \log(\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n),$$

und daher mittels exp auf beiden Seiten der Glg exponenziert

$$e = e^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$

1.29 Bsp (Waire diffbare Fkt)

(i) Die allgemeine Potenzfkt ($\alpha \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty)$) ist diffbar und es gilt

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

und daher insbesondere

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = (x^{-1/2})' = -\frac{1}{2} x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \right\}, \left(\sqrt{x} \right)' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \right\}$$

Tatsächlich können wir rechnen

$$(x^\alpha)' \stackrel{1.23}{=} (\exp(\alpha \log(x)))' = \exp'(\alpha \log x) (\alpha \log x)'$$

12] Def. 3.5(ii)

$$= \exp(\alpha \log x) \alpha \log'(x)$$

1.8(iv)

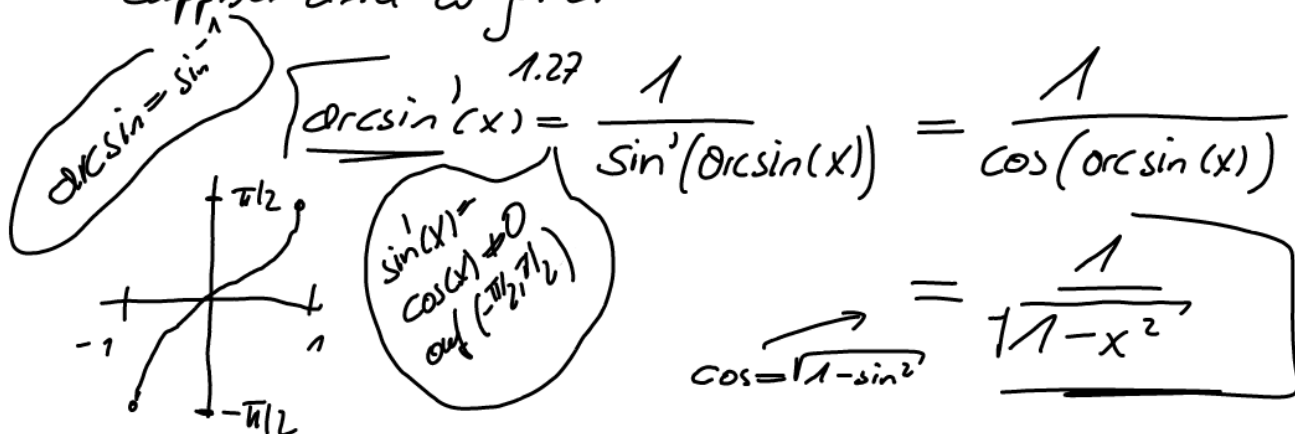
$$\stackrel{1.28(ii)}{=} x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

(ii) (Affine Variablentransformation) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $g(x) := f(ax+b)$ ist diffbar mit

$$g'(x) = f'(ax+b)(ax+b)' = a f'(ax+b).$$

(iii) Der Arcussinus [12] 3.28(ii)] ist auf $(-1, 1)$ diffbar und es gilt

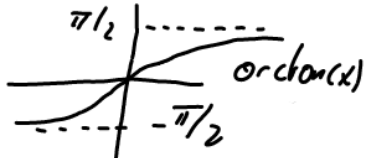
$\arcsin = \sin^{-1}$



$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(iv) Der Arcustangens [12] 3.28(iii)] ist diffbar auf seinem ganzen Defbereich \mathbb{R} und es gilt



$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}$$

$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

1.30 BEM (Höhere Ableitungen)

(i) (Notation & Def) Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf (pont I) diffbar.

Dann definieren wir die Ableitungsfunktion durch

$$\left\{ f': I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) \right\}$$

und wir können uns die Frage nach Eigenschaften dieser Fkt f' stellen - insbesondere nach ihrer Diffbarkeit.

Ist f' in $\xi \in I$ diffbar so schreiben wir $f'(\xi)$ für die Ableitung von f' in ξ und nennen $f''(\xi)$ die 2. Ableitung von f in ξ . Ist f' auf ganz I diffbar, so definieren wir die Fkt

$$f'' : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f''(x).$$

und nennen sie die 2. Ableitungsfunktion von f . Oft schreibt man auch $f^{(2)}$ für f'' .

Induktiv definieren wir nun die n -te Ableitung von f in $\xi \in I$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ via (folgt \exists)

$$f^{(n)}(\xi) = (f^{(n-1)})'(\xi)$$

die n -te Ableitung ist die Ableitung der $(n-1)$ -ten Abl.

In diesem Zusammenhang schreiben wir auch $f^{(0)}$ für f selbst.

(ii) (Ein Bsp)

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$\sin''(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\sin'''(x) = -\sin'(x) = -\cos(x)$$

$$\sin^{(4)}(x) = -\cos'(x) = \sin(x)$$

$$\sin^{(5)}(x) = \sin'(x) = \cos(x), \text{ usw.}$$

Also gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^{(2n)} = (-1)^n \sin, \quad \sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos \end{array} \right.$$

Somit ist \sin beliebig oft diffbar, d.h. n -mal diffbar für jedes $n \in \mathbb{N}$. Solche Funktionen nennt man auch glatt oder C^∞ -Fkt.

Funktionen, die n -mal diffbar sind und deren n . Ableitung stetig ist, nennt man auch n -mal stetig differenzierbar oder C^n -Funktionen.

(iii) WARNUNG!

($C^n \not\equiv C^{n+1}$)

Eine diffbare Funktion muß keine diffbare Ableitung haben. z.B. ist $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ zwar C^1 aber nicht $2x$ -diffbar. [Details UE]

(diffbar $\not\equiv C^1$)

Noch schlimmer muß die Ableitung einer diffbaren Fkt nicht einmal stetig sein, z.B. ist

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ diffbar aber nicht C^1 [Details UE]

§2 EIGENSCHAFTEN DIFFERENZIERBARER FUNKTIONEN

2.1 INTRO. In diesem § kommen wir zu ersten Anwendungen der Differentialrechnung. Wir werden sehen, dass sich viele Eigenschaften von Fkt in ihrer Ableitung widerspiegeln (vgl. 0.1). Insbesondere werden wir die Monotonie, die Konvexität und das Auftreten lokaler Extrema mithilfe der Ableitung untersuchen. Außerdem werden wir aus Schranken an die Ableitung Schranken an die Fkt selbst gewinnen und die aus der Schulmathematik wohlbekannten Regeln von de l'Hospital beweisen.

Der Schlüssel zu all diesen Resultaten ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS) den wir ausführlich diskutieren.

Wir beginnen mit einer Sprechweise

1.1A Notation/Sprechweise (Randpunkte & innere Punkte von Intervallen)

Sei I ein Intervall

(i) Falls I beschränkt ist, also von der Form [vgl. (0) 1.6] $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ oder (a, b) , dann heißen a & b Randpunkte von I .

(ii) Falls I halbbeschränkt ist, also von der Form $[0, \infty)$ oder $(0, \infty)$ (bzw. $(-\infty, b]$ oder $(-\infty, b)$) dann heißt a (bzw. b) Randpunkt von I

(iii) $\xi \in I$ heißt inner Punkt von I , falls ξ kein Randpunkt ist.

(iv) I° ist die Menge der inneren Punkte (des sog. Innen) von $[0, b]$, $(0, b]$, $[0, b)$ und $(0, b)$ jeweils $(0, b)$.

Inbesondere besteht jedes offene Intervall nur aus inneren Punkten, ist also gleich seinem Innen.

2.2 DEF (lokale Extremwerte) Sei I ein Intervall und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

(i) Ein Pkt $\xi \in I$ heißt lokales Maximum von f falls es eine Umgebung von ξ gibt auf der f nur Funktionswerte kleiner-gleich $f(\xi)$ annimmt, d.h. falls

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: f(\xi) \geq f(x). \quad (*)$$

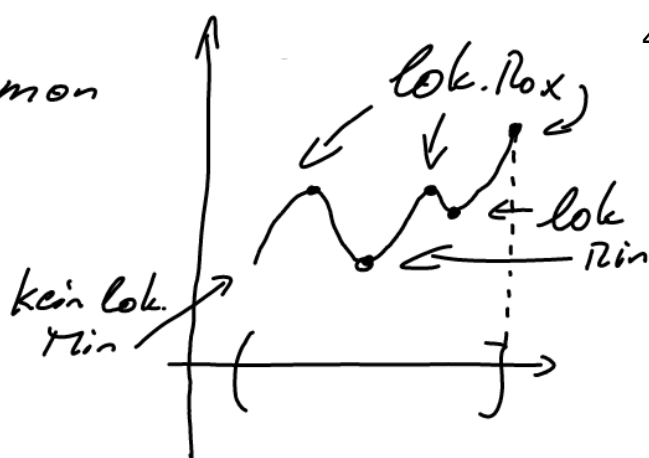
(ii) Der Pkt ξ heißt striktes lokales Maximum von f , falls in $(*)$ „ \geq “ statt „ \geq “ gilt, d.h. falls

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: f(\xi) > f(x).$$

(iii) Analog sind (strikte) lokale Minima definiert, d.h. ξ heißt (striktes) lokales Minimum, falls

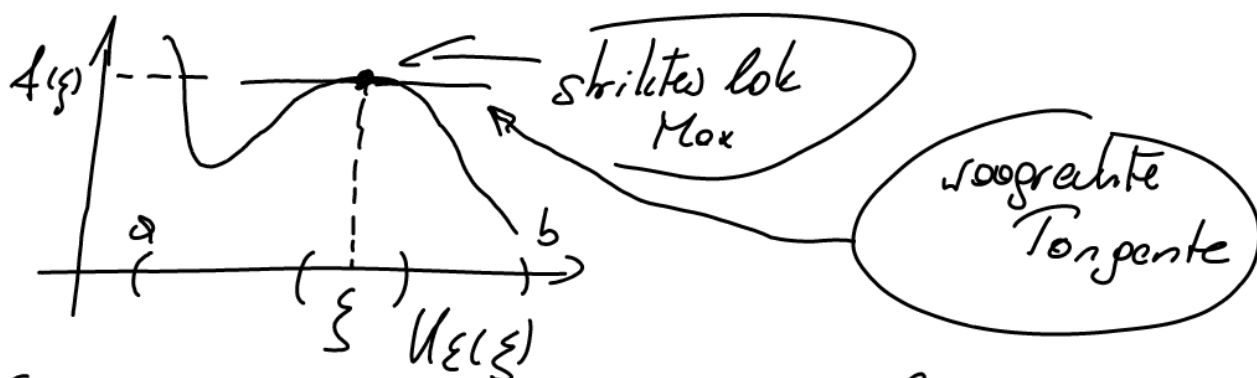
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: f(\xi) \leq f(x) \quad (f(\xi) < f(x)).$$

(iv) In beiden Fällen spricht man von einer (streikten) lokalen Extremstelle oder einem (str.) lok. Extremum



2.3 BEM (Extrema & Ableitung, die Idee)

(i) Der Inhalt von Def 2.2 für innere Punkte ξ (für ein str. lok. Max.) kann so veranschaulicht werden



(ii) Geometrisch erwarten wir uns, dass - falls f diffbar in ξ ist - f dort eine waagrechte Tangente hat, also $f'(\xi) = 0$ gilt.

Tatsächlich ist das eine notwendige Bedingung, wie wir gleich sehen werden

2.4 Prop (Notwendige Bedingung f. lok. Extrema)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar und sei ξ ein innerer Pkt von I . Falls ξ lokales Extremum von f ist, dann gilt $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Wir behandeln nur den Fall des lok. Max, der Fall des Min ist völlig analog.

Sei also ξ ein (nicht notwendigerweise striktes) lok. Max. Dann gilt

$$2.2(ii) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \quad f(\xi) \geq f(x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{diffbar in } \xi \\ \implies \end{array} \right. \lim_{x \nearrow \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\geq 0} = f'(\xi) = \lim_{x \searrow \xi} \underbrace{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}_{\leq 0}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Zähler } \leq 0, \text{ Nenner } < 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \text{Zähler } \leq 0, \text{ Nenner } > 0 \end{array} \right]$$

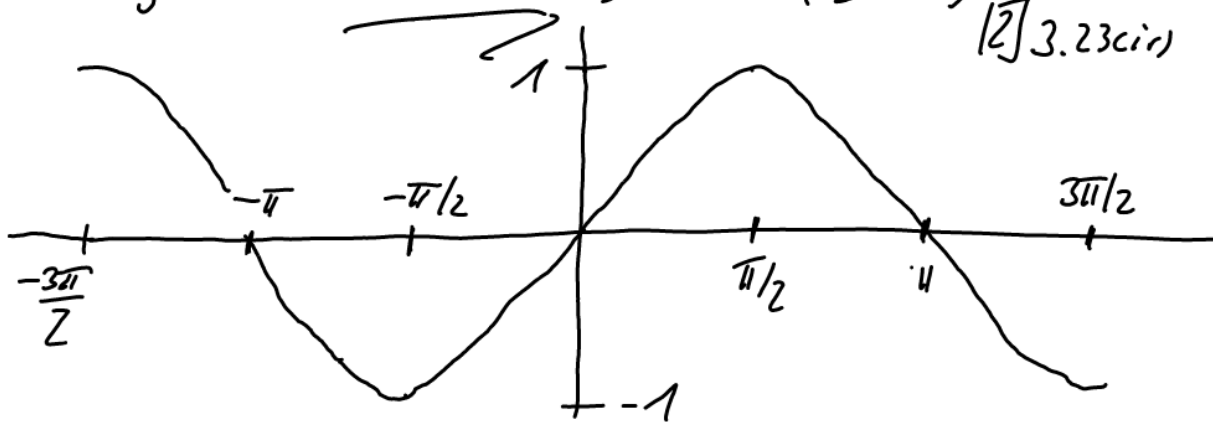
Also $0 \leq f'(\xi) \leq 0$ und damit $f'(\xi) = 0$. \square

2.5 Bsp (Extrema des Sinus) Wir betrachten $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

In [2] 3.24(ii) haben wir bereits festgestellt, dass die Extrema des Sinus in $\pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) liegen.

[mittels $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ sind es genau die NST des \cos]

Tatsächlich gilt $\sin'(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$ ([2] 3.23(i))

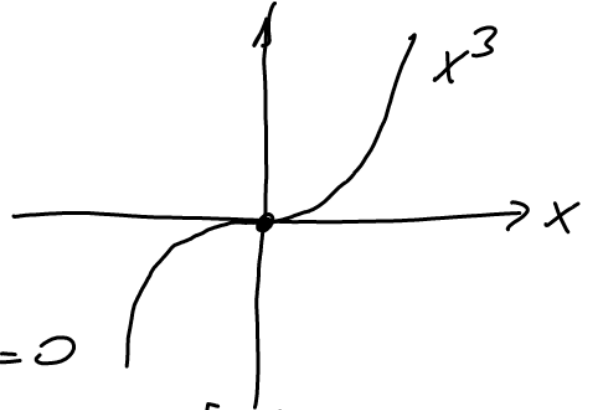


2.6 WARNUNG (Notwendig vs hinreichend, lokal vs global)

(i) 2.4 sagt, dass $f'(\xi) = 0$ notwendige Bedingung für ein lok. Extr. ist — Sie ist nicht hinreichend, wie folgendes Bsp zeigt

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3$$



Es gilt $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$
 aber $\xi = 0$ ist kein lokales Extr. [denn jede Umgebung $U_\varepsilon(0)$ enthält pos & negative x und damit nimmt f auf $U_\varepsilon(0)$ pos & neg. Werte an]

Daher gilt also

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} \text{lok Extr} \Rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} f'(\xi) = 0}$$

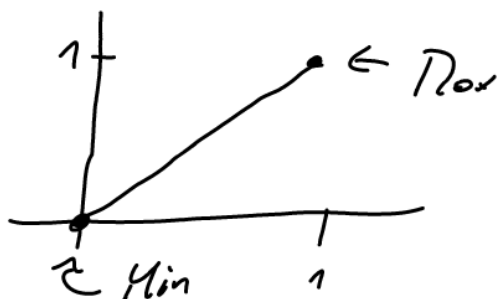
und Nullstellen von f' sind nur Kandidaten für lok. Extr.

(ii) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann besagt [2] Thm 2.11, dass f globale Max & Min auf $[a, b]$ besitzt.

Diese können am Rand von $[a, b]$ liegen, also in a oder in b . Selbst falls f diffbar auf $[a, b]$ ist (mit einseitige Ableitungen in a, b) müssen $f'(a)$ und $f'(b)$ nicht verschwinden, wie das folgende Bsp zeigt.

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$



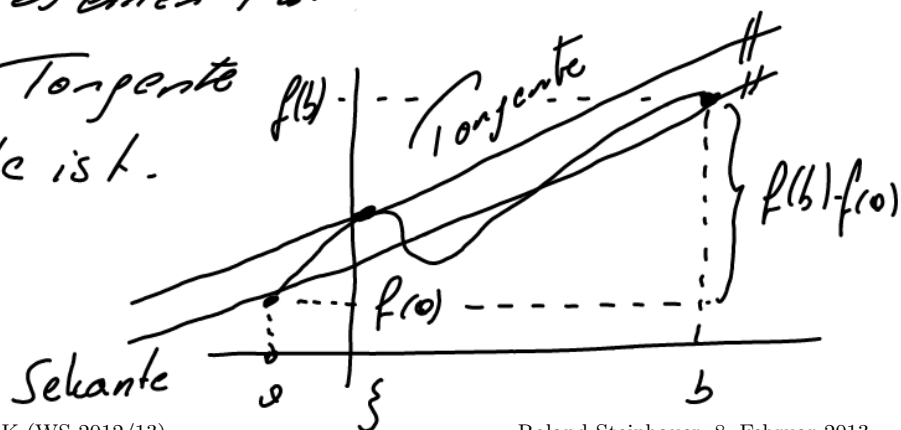
Dann hat f ein Min in $\xi = 0$ und ein Max in $\xi = 1$
 oder $f'(0) = 1 = f'(1)$.

Dieses Bsp steht nicht im Widerspruch zu 2.4., da 0 & 1 keine inneren Punkte von $I = [0, 1]$ sind, also 2.4 über $f'(0)$, $f'(1)$ keine Aussage macht.

Wenn wir andererseits $f(x) = x$ auf $I = (0, 1)$ betrachten,
 dann hat f weder Min noch Max (nur inf & sup) und
 das Problem löst sich in Luft auf...

2.7 Motivation (lokale Änderungsrate - globale Eigenschaften)

- (i) Wir unternehmen jetzt den ersten Schritt, der es uns erlauben wird, aus dem Kenntnis der Ableitung einer Fkt (in allen Punkten eines Intervalls) globale Eigenschaften der Fkt abzuleiten: den Mittelwertsatz (MWS)
- (ii) Dessen Aussage ist anschaulich evident:
 Im Intervall I muß es einen Punkt geben in dem die Tangente parallel zur Sekante ist.



(iii) Der Satz hat auch eine anschauliche Bedeutung im Rahmen der Mechanik (vgl. 1.11):

Ein Auto fährt auf einem Autobahnstück der Länge 135 km und legt dieses in 1 Stunde zurück. Dann muß irgendwann die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von 130 km/h überschritten worden sein.

Hier entspricht die Ableitung der Ortsfunktion der Momentangeschwindigkeit und es muß einen Zeitpunkt geben an dem diese gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit von 135 km/h ist.

Nun zur exakten Formulierung des MWS

2.8 THM (Mittelwertsatz)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a, b) .
Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit

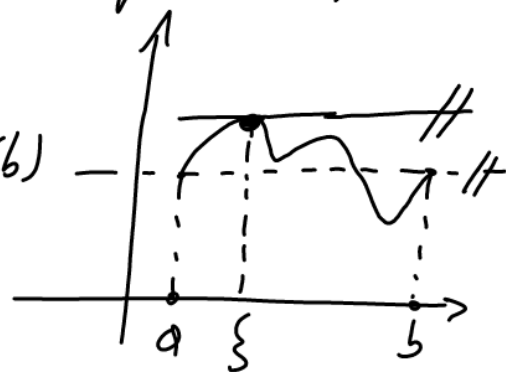
$$\left\{ \begin{array}{l} f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{oder (was dasselbe ist) mit} \\ f(b) - f(a) = f'(\xi) (b - a) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

2.9 Bem (Beweisstrategie: „Kippen“ des Graphen)

(i) Die grundlegende Beweisstrategie besteht darin, den Graphen von f zu modifizieren und so

$f(a) = f(b)$ zu erreichen. Damit müssen wir lediglich einen Punkt mit $f'(\xi) = 0$ finden, was wir mittels 2.4 tun werden.

(ii) Die Idee ein solches ξ zu finden ist nun die folgende. Interpretieren wir f ob die „Höhenfunktion“ bei einer Bergwanderung. Dann bedeutet $f(a) = f(b)$, dass wir uns am Abend auf derselben Seehöhe befinden wie in der Früh. Klareweise können wir weder immer bergauf noch immer bergab gegangen sein. Vielmehr werden wir genau dort wo wir vom Bergaufgehen zum Bergabgehen übergegangen sind – also am Gipfel ($\hat{=}$ lok. Max.) – eine waagrechte Tangente (kein Anstieg) gehabt haben.



Diese Ideen heißen wir nun in wasserdichte Mathematik.

2.10 LEMMA (Satz von Rolle)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a, b) .

Falls $f(a) = f(b)$, dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$

mit $f'(\xi) = 0$

Beweis. (erfreulich kurz)

(1) Falls f konstant ist $[f(x) = f(a) = f(b) \forall x \in (a, b)]$
 ist die Aussage trivial $[f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)]$ 1.8(ii)

Sei also f nicht konstant

$\Rightarrow \exists x \in (a, b)$ mit $f(x) > f(a)$ oder $f(x) < f(a)$;

sei oBdA $f(x) > f(a) = f(b)$ (*) [sonst analog]

(2) f stetig auf $[a, b]$ $\xrightarrow{1.2) 2.11}$ f hat ein Max in $[a, b]$
 d.h. $\exists \xi \in [a, b]$ mit

$$(**) f(\xi) \geq f(x) \forall x \in [a, b]$$

(3) Wegen (*) kann ξ nicht am Rand liegen, also ist
 ξ innerer Punkt $[\xi \in (a, b)]$ und wir können
 Prop 2.4 verwenden [beachte (**)]

$$\xrightarrow{2.4} f'(\xi) = 0.$$

□

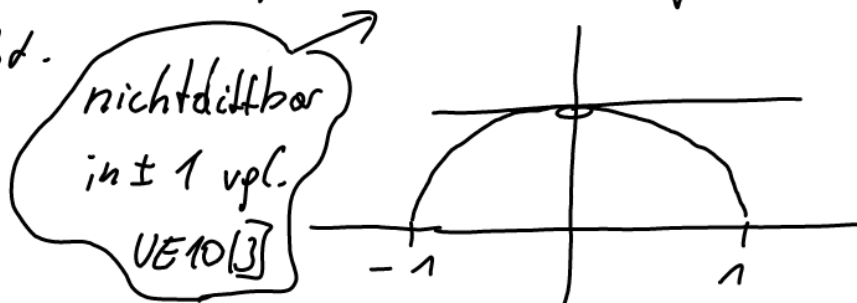
2.11 Bem (zum Satz von Rolle & seinem Beweis)

(i) Beachte, dass der Beweis & auch der Satz wesentlich
 auf 1.2) Thm 2.11 beruht, also darauf, dass stetige
 Fkt auf K_p Mengen Min & Max besitzen?
 [und somit letztlich auf der Vollständigkeit von \mathbb{R} .]

(ii) Die Voraussetzungen f stetig auf $[a, b]$ und diffbar auf dem Inneren (a, b) von $[a, b]$ ist natürlich teilweise redundant: aus diffbar in (a, b) folgt natürlich stetig in (a, b) [1.13].

Daher bewirkt die Voraussetzung f stetig in $[a, b]$ nur die Stetigkeit am Rand, also in a und b .

Natürlich hätten wir auch f diffbar auf $[a, b]$ voraussetzen können. Da diese Voraussetzung etwas stärker ist, würde das Lemma schwächer werden. z.B. wäre die Fkt $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf $[-1, 1]$ nicht erfüllt.



(iii) Beachte, dass alle Voraussetzungen im Lemma tatsächlich notwendig sind. [Details UE].

(iv) Wir beweisen jetzt den MWS indem wir den Graphen der Fkt im MWS in "Rolle-Position" bringen.

2.12 Beweis des MWS. Sei f wie im Thm. Wir definieren

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Dann ist g stetig auf $[a, b]$, diffbar auf (a, b) und $g(a) = f(a) = g(b)$.

et. "Baukosten"

Rolle $\Rightarrow \exists \xi \in (0, b)$ mit

$$0 = f'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(0)}{b - 0}.$$

□

2.13 Bem (Anwenden des MWS)

Der MWS ist ein reines Existenzresultat; in dem Sinn, dass die Existenz von ξ mit der entsprechenden Eigenschaft zwar garantiert ist, es aber keine Möglichkeit liefert, ξ auch tatsächlich zu berechnen.

Daher wird der MWS meist in der Form (2.1) verwendet, um Abschätzungen herzuleiten. Das werden wir auch gleich tun und dabei erste Anwendungen der Differentialrechnung kennen lernen, die globale Aussagen über die Fkt ermöglichen; genauer über Wachstumsschranken & Monotonie!

vgl. 0.1

2.14 KOR (Wachstumsschranken)

Sei $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf $(0, b)$.

(i) Falls f' beschränkt ist, d.h. $\exists C > 0$ mit

$$|f'(x)| \leq C \quad \forall x \in (0, b),$$

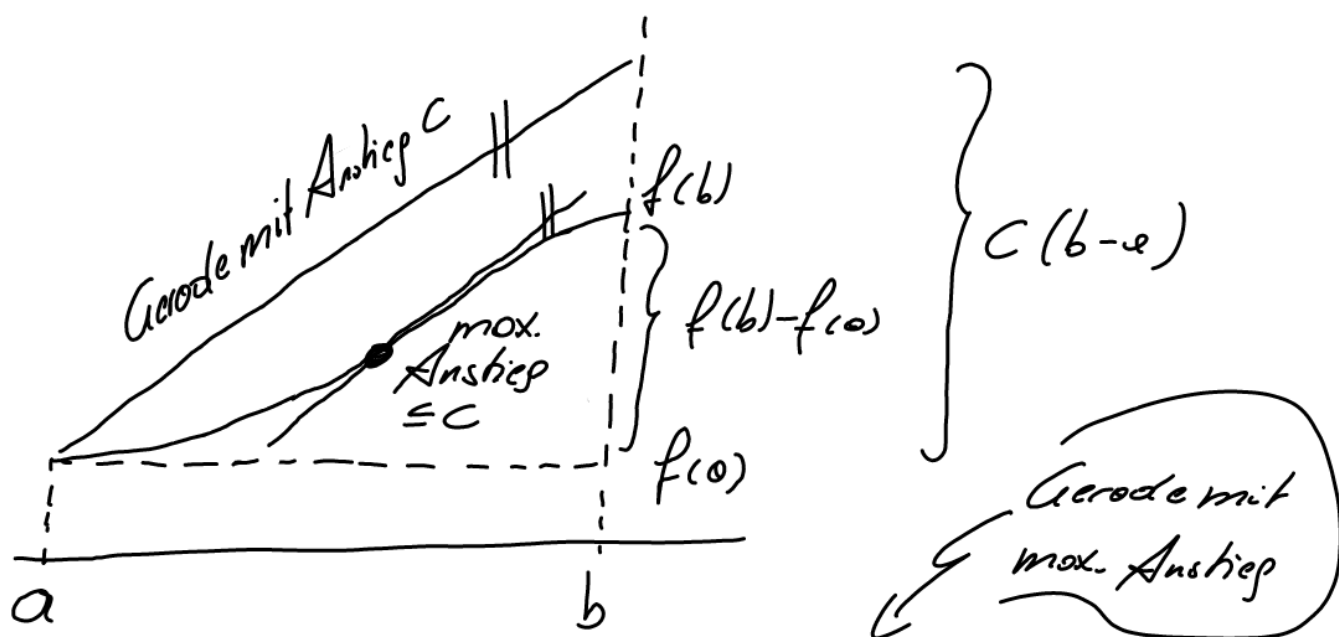
dann gilt für alle $x_1, x_2 \in [0, b]$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq C |x_2 - x_1| \quad (2.2)$$

(ii) Falls $f'(x) = 0 \forall x \in (0, b)$, dann ist f konstant
 [genauer $f(x) = f(a) = f(b) \forall x \in (0, b)$].

2.15 Bem (Lipschitzstetigkeit)

(i) Die Bedeutung von (i) kann leicht in einer Skizze veranschaulicht werden:



Eine Funktion f mit $|f'(x)| \leq C \forall x$ kann nicht stärker wachsen als eine Gerade mit Anstieg C , bzw. $f(b)$ muß kleiner sein als $f(a) + C(b-a)$, also $f(b) - f(a) \leq C(b-a)$.

(ii) Funktionen, die (2.2) erfüllen heißen Lipschitz-stetig oder dehnungsbeschränkt, genauer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt L -stetig, falls

$$\exists C > 0: |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \forall x, y \in I$$

Die Funktionswerte liegen also nicht weiter auseinander als die Argumente mal einer fixen Konstante C , genannt Dehnungsschranke.

(iii) Lipschitz stetige Fkt sind stetig, ja sogar p.l.m. stetig. Die jeweiligen Umkehrungen sind falsch, d.h. für $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt (jeweils auf I)

$$\left\{ \text{Lipschitz stetig} \not\Rightarrow \text{glm. stetig} \not\Rightarrow \text{stetig.} \right\} \quad [2] 2.15$$

Details siehe UE.

(iv) Wir können 2.14(ii) nun auch so ausdrücken:

Diffbare Fkt mit beschränkter Ableitung sind nicht nur (p.l.m.) stetig sondern sogar Lipschitz stetig.

Beweis (von 2.14 - erfreulich einfach?)

(i) Sei f wie in der Behauptung. Dann gilt

$$\forall x_1, x_2 \in [0, b] \quad \exists \xi \in (x_1, x_2): \quad \text{(2.1)} \quad \text{lt. Vorass.}$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)| |x_2 - x_1| \leq C |x_2 - x_1|. \quad (*)$$

(ii) Lt. Voraussetzung ist $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (0, b)$

$$\stackrel{(*)}{\underset{C=0}{\implies}} f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in [0, b]$$

Vervende (i) mit $C=0$

□

2.16 BSP (Sinus ist dehnungsbeschränkt)

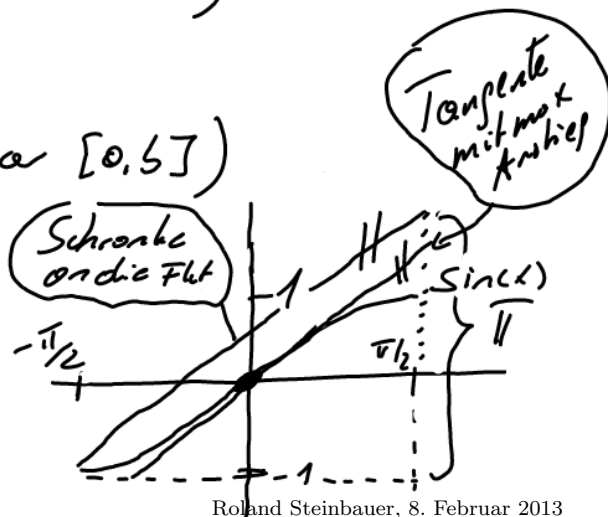
$$\text{Sei } f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x)$$

$$\implies f'(x) = \cos(x) \quad \forall x \in (0, b) \quad (\text{sogar } [0, b])$$

$$\implies |f'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$$

$$\stackrel{2.14(ii)}{\implies} |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

$$\forall x, y \in [0, b]$$



2.17 PROP (Monotonie via Ableitung)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf (a, b) . Dann gilt

(i) $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ mon. wachsend auf $[a, b]$

(ii) $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ str. mon. wach. auf $[a, b]$

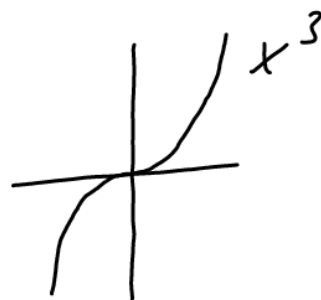
(iii) Beide Punkte (i) & (ii) gelten analog für $f'(x) \leq 0$ und (str.) mon. fallend.

2.18 WARNUNG! Die Umkehrung von (iii) ist falsch, d. h.

$f'(x) > 0 \forall x \in (a, b) \not\Leftarrow f$ str. mon. wach. auf $[a, b]$.

Die Ableitung str. mon. Fkt kann in einzelnen Plätzen verschwinden, wie etwa $f(x) = x^3$ lehrt:

Es gilt f ist str. mon. wachsend, aber auf $[-1, 1]$ aber $f'(0) = 0$!



Beweis (von 2.17).

(i) \Rightarrow und (ii): Indir. ang f ist nicht (str.) mon. wach.

$\Rightarrow \exists x_1 < x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) > f(x_2)$

MWS (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$)

$\Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$\Rightarrow f'(\xi) < 0$ (bzw. $f'(\xi) \leq 0$) Widerspruch

(ii) \Leftarrow : Da f mon. wachsend, gilt $\forall x, \xi \in (0, b), x \neq \xi$

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0$$

$\xi > x \Rightarrow$ Zähler & Nenner > 0
 $\xi < x \Rightarrow$ — " — ≤ 0

$$\Rightarrow f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in (0, b)$$



2.19 KOR (Hinreichende Bedingung f. lok. Extr)

Sei $f: (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar, sei $\xi \in (0, b)$ und sei f 2-mal diffbar in ξ . Dann gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(\xi) = 0 \\ f''(\xi) > 0 \quad (f''(\xi) < 0) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ hat ein striktes} \\ \text{lok. Min (Max)} \\ \text{im Punkt } \xi$$

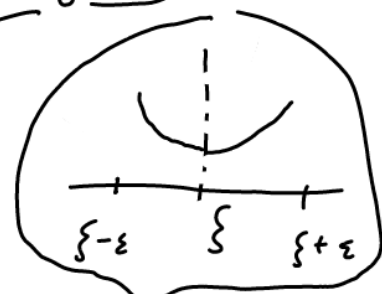
Bew. Sei ξ wie oben und $f'(\xi) = 0, f''(\xi) > 0$ [der Fall $f''(\xi) < 0$ ist völlig analog]

$$\Rightarrow 0 < f''(\xi) = \lim_{\xi \neq x \rightarrow \xi} \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x}$$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ sodass $\forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$

$$0 < \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} = - \frac{f'(x)}{\xi - x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi): f'(x) < 0 \stackrel{2.17}{\Rightarrow} f \text{ str. mon. f.} \\ \forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon): f'(x) > 0 \stackrel{2.77}{\Rightarrow} f \text{ str. mon. w.} \end{array} \right\} \Rightarrow \xi \text{ ist str. Min}$$



2.20 Bsp (Nochmal Extreme des Sin)

Wie in 2.5 wiederholt wissen wir seit [2] 3.24(iii), dass die Extreme des Sinus in $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ liegen.

Wie in 2.5 nachgeprüft, gilt klareweise die notwendige Bedingung für Extreme 2.4.

Es sind auch die jeweiligen hinreichenden Bedingungen aus 2.19 erfüllt:

[2] 3.22(iii)

$$\sin' \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) = 0$$

$$\sin'' \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) = \begin{cases} +1 & k \text{ ungerade} \\ -1 & k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Minima in } \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$$

$$\text{Maxima in } \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

2.21 WARNUNG (Hinreichend nicht notwendig?)

Die Bedingung 2.19 ist nicht notwendig, wie

das Bsp $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^4$$



zeigt: f hat ein striktes lokales

Min in $\xi = 0$ [$f(x) = x^4 > 0 \forall x \neq 0$] aber

$f''(x) = 12x^2$ und damit $f''(0) = 0$.

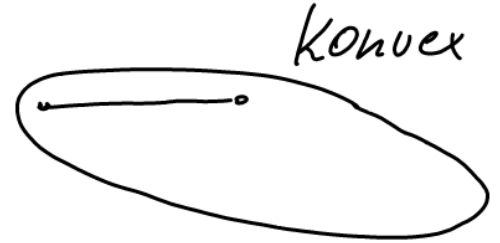
2.22 Motivation (Konvergenz)

Als nächsten Begriff den wir mittels Differentialrechnung beschreiben können befassen wir uns mit dem

Krümmungsverhalten von Fkt und mit dem Begriff

KONVEXITÄT

(i) Eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 wird konvex genannt, wenn mit je zwei Punkten schon die gesamte Verbindungsgerade in der Menge liegt.



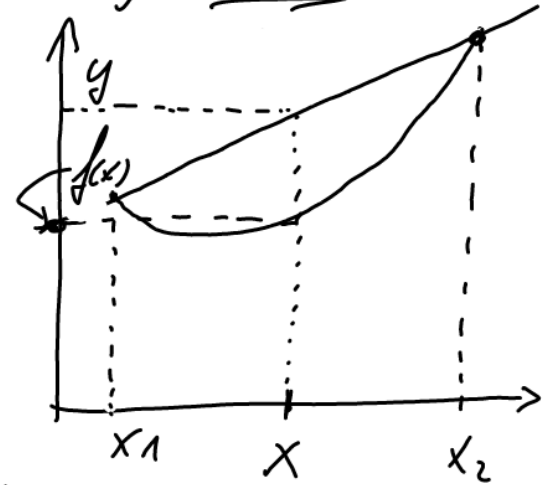
Konvex



nicht konvex

(ii) Eine Fkt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ werden wir konvex nennen (offizielle Definition), falls die Menge über ihrem Graphen konvex ist.

Anderes ausgedrückt, falls die Sekante zwischen je 2 Punkten über dem Graphen liegt.



(iii) Diese Idee formalisieren wir wie folgt: Für $\lambda \in [0, 1]$ durchläuft

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$$

das obg Intervall $[x_1, x_2]$. Analog durchläuft

$$y = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

die Sekante von $f(x_2)$ bis $f(x_1)$. Jetzt brauchen wir nur noch $f(x)$ mit y zu vergleichen: Ist $y \geq f(x)$, so liegt die Sekante über der Kurve.

Jetzt offiziell

2.23 Def (Konvexe Fkt) Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt auf dem Intervall I .

(i) Wir nennen f konvex, falls $\forall x_1, x_2 \in I$ und $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\left\{ f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \right\}$$

gilt.

(ii) Wir nennen f konkav, falls $-f$ konvex ist.

2.24 Prop (Konvexität von f'')

Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal diffbar.

Dann gilt

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

konkave Fkt

Beweis. " \Leftarrow " Wir prüfen die Bedingung in 2.23(i) nach.

Dazu sei (oBdA) $x_1 < x_2$ und $0 < \lambda < 1$. Wir setzen

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \quad [\Rightarrow x_1 < x < x_2]$$

2.17(i) $\Rightarrow f'$ ist mon wachsend auf $[x_1, x_2]$

MWS $\Rightarrow \exists \xi_1 \in (x_1, x) \quad \exists \xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (*)$$

Es gilt $x - x_1 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1) > 0$

$x_2 - x = x_2 - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2 = \lambda(x_2 - x_1) > 0$

NICHT VORGESTRIKEN

und damit folgt aus (*)

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-t} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{t}$$

und daher

$$\begin{aligned} t f(x) + (1-t) f(x) &\leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2) \\ f(x) &\leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2). \end{aligned}$$

⇒ "Indirekte ang. $\exists \xi$ mit $f''(\xi) < 0$. Wir setzen

$$\varphi(x) = f(x) - f'(\xi)(x - \xi) \quad (x \in I) \quad (*)$$

Dann gilt • φ ist 2-mal diffbar auf I

$$\bullet \varphi'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0$$

$$\bullet \varphi''(\xi) = f''(\xi) < 0$$

z.19

⇒ φ hat ein striktes lok. Maximum in ξ

z.20ii) ⇒ $\exists \varepsilon_0 > 0: \varphi(x) < \varphi(\xi) \quad \forall x \in U_{\varepsilon_0}(\xi) \subseteq I$

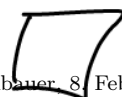
Insbesondere gilt für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$\varphi(x - \varepsilon) < \varphi(\xi)$, $\varphi(x + \varepsilon) < \varphi(\xi)$ und daher

$$f(\xi) = \varphi(\xi) > \frac{1}{2} (\varphi(\xi - \varepsilon) + \varphi(\xi + \varepsilon)) \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2} (f(\xi - \varepsilon) + f(\xi + \varepsilon)) \quad (**)$$

Setzen wir nun $t = 1/2$, $x_1 = \xi - \varepsilon$, $x_2 = \xi + \varepsilon$, dann lautet (**)

$$f\left(\underbrace{\frac{1}{2}x_1 + (1-\frac{1}{2})x_2}_{\xi}\right) > \frac{1}{2} f(x_1) + (1-\frac{1}{2}) f(x_2) \quad \swarrow \text{Zur Konvexität}$$



2.25 Bsp (Konvexe & konkave Fkt)

(i) (Quadratische Polynome) Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($x \in \mathbb{R}$)
mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Es gilt $f''(x) = 2a$ und damit (wegen 2.24)

f konvex $\Leftrightarrow a > 0$

f konkav $\Leftrightarrow a < 0$



(ii) Die Exponentialfkt ist konvex, denn

$$\exp''(x) = \exp(x) > 0 \quad [1.8(\text{iv}), [1]4.40(\text{ii})]$$

(iii) Die Logarithmusfkt ist konkav, denn

$$\log''(x) = (1/x)' = -1/x^2 < 0 \quad [1.28(\text{ii}), (\text{iii})]$$

2.26 BEM (Wendestellen)

(i) Punkte $\xi \in I$ in denen eine Fkt $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
ihr Krümmungsverhalten ändert heißen
Wendepunkte oder Wendestellen.

In einer Wendestelle ändert f ihr Verhalten
von konkav auf konvex oder umgekehrt



ciii Falls f genügend oft differenzierbar ist, dann besagt 2.24, dass eine Wendestelle ein Pkt ist, indem f'' das Vorzeichen wechselt, also insbesondere eine Nullstelle von f'' .

Analog zum Fall lok. Extrema gibt es daher eine notwendige Bedingung für Wendepunkte ξ [$f''(\xi) = 0$] und eine hinreichende Bedingung [$f''(\xi) = 0, f'''(\xi) \neq 0$].

[Details VE]

2.27 MOTIVATION (Die Regeln von De L'Hospital)

(i) Das Problem: Bei der Berechnung von Grenzwerten der Form

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tritt öfter eine der nicht definierten Fälle „ $\frac{0}{0}$ “, „ $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$ “ auf, wie etwa in

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x}}{x^k}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x)}{1/x}.$$

Zuerst haben wir diese Probleme – jeweils mit passenden Methoden / Tricks gelöst [12] 3.8, [12] 3.17 (viii)],

praktisch wäre allerdings eine allgemeine Methode. Eine solche kann mit Hilfe der Differentialrechnung tatsächlich angegeben werden

(ii) Die Idee. Wir betrachten den Fall „0/0“. Seien also f, g diffbar und $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x)$ und $g'(x) \neq 0 \forall x$.

Dann gilt [1.13] $f(\xi) = 0 = g(\xi)$ und somit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\xi)}{g(x) - g(\xi)} = \frac{\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}}{\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}} \rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (*)$$

Wir dürfen also darauf hoffen, den Limes $f(x)/g(x)$ durch den Limes $f'(x)/g'(x)$ ersetzen zu können.

Tatsächlich wird uns dies gelingen. Zunächst benötigen wir eine technische Verallgemeinerung des MWS.

2.28 Lemma (Verallgemeinertes MWS)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig & diffbar auf (a, b) .

Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$ mit

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

2.28 Bem (zum MWS) Falls $g'(x) \neq 0$ auf $(0, b)$
 und damit auch $p(b) - p(0) \neq 0$ [MWS \Rightarrow] $\exists \xi \in (0, b)$.
 $p(b) - p(0) = g'(\xi)(b - 0)$; $p'(\xi) \neq 0 \forall \xi \in (0, b) \Rightarrow p(b) - p(0) \neq 0$
 können wir die Formel in 2.28 umschreiben zu

$$\frac{f(b) - f(0)}{p(b) - p(0)} = \frac{f'(\xi)}{p'(\xi)}$$

Und das ist schon ein Teil des heuristischen Arguments
 (*) in 2.26 (iii).

Beweis von 2.28. Wende den Satz von Rolle auf
 die Fkt $\varphi(x) = (f(b) - f(0))g(x) - (p(b) - p(0))f(x)$
 $(x \in [0, b])$ an. Details siehe [UE]. □

2.30 SATZ (Regeln von de l'Hospital)

Seien $f, p: (0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
 diffbar und sei $p'(x) \neq 0 \forall x \in (0, b)$. Sei außerdem

(i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, oder

(ii) $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$.

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{p(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{p'(x)},$$

falls der rechte Limes (evtl. als uneigentl. Limes $\pm \infty$) existiert.
 Analoges gilt für den Limes $x \rightarrow b$.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $x \searrow a$.

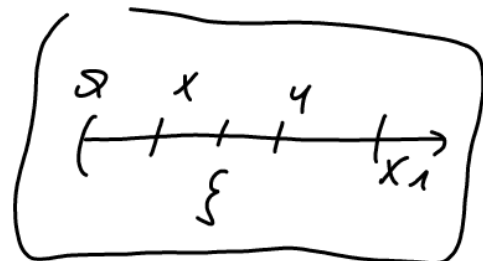
(1) Sei zunächst

$$(*) \quad \eta := \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Wir wählen y_0, y_1 mit $\eta < y_1 < y_0$

$\stackrel{(*)}{\implies} \exists x_1 \in (a, b)$ sodass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < y_1 \quad \forall x \in (a, x_1) \quad (**)$$



Seien nun $x, u \in (a, x_1) \stackrel{(\text{vmus})}{\implies} \exists \xi \in (x, u)$:

$$\frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \stackrel{(**)}{<} y_1 < y_0 \quad (***)$$

gen. part $\neq 0$
vpt. 2.23

Im Fall (i) gilt für $x \searrow a$ wegen (***)

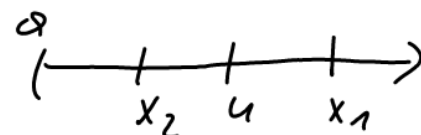
$$\left\{ \frac{f(u)}{g(u)} \leq y_1 < y_0 \right\} \forall u \in (a, x_1) \quad (\Delta)$$

Im Fall (ii) müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir behandeln nur $g(x) \rightarrow +\infty$, der andere Fall ist analog.

Zu festem $u \in (a, x_1)$ bestimmen wir ein $x_2 \in (a, u)$ sodass

$$g(x) > \max\{0, g(u)\} \quad \forall x \in (a, x_2)$$

$$\implies \frac{g(x) - g(u)}{g(x)} > 0 \quad \forall x \in (a, x_2)$$



$$\stackrel{(***)}{\Rightarrow} \frac{f(x) - f(u)}{g(x)} < y_1 \frac{g(x) - g(u)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < y_1 - y_1 \frac{g(u)}{g(x)} + \frac{f(u)}{g(x)} \quad \forall x \in (0, x_2)$$

$$\stackrel{(***)}{\Rightarrow} \exists x_3: \left. \begin{array}{l} \rightarrow y_1 \quad (x \searrow 0) \\ \frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (0, x_3) \quad (\Delta\Delta) \end{array} \right\}$$

Zusammengefasst gilt also in beiden Fällen (i) und (ii) $\forall y_0 > \eta \exists x_0$ sodass $[(\Delta), (\Delta\Delta)]$

$$\left. \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (0, x_0) \right\} \right\} (\diamond)$$

(2) Analog folgt für $\eta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$: $\forall \tilde{y}_0 < \eta \exists \tilde{x}_0$:

$$\left\{ \tilde{y}_0 < \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in (0, \tilde{x}_0) \right\} \left\{ (\diamond\diamond) \right\}$$

(3) Aus (\diamond) & $(\diamond\diamond)$ ergibt sich nun die Beh., denn falls $\eta = \pm\infty$ wird durch (\diamond) bzw. $(\diamond\diamond)$ alles erledigt. Falls $\eta \in \mathbb{R}$ ergibt die Kombination von (\diamond) & $(\diamond\diamond)$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{x}_0$ sodass $\eta - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \eta + \varepsilon \quad \forall x \in (0, \bar{x}_0) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \eta. \quad \square$

2.31 BSP (Die Regeln von De l'Hospital)

(i) Wir geben einen alternativen Beweis für [vgl. (2) 3.8 (iii)]

$$\left\{ \frac{\log(x)}{x^\alpha} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty) \right\}$$

$$f(x) = \log(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad f'(x) = 1/x$$

$$g(x) = x^\alpha \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\stackrel{2.30}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

(ii) Wir berechnen $\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$

Es gilt $\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)}$ und wir versuchen

2.30 anzuwenden. Es ergibt sich

$$f(x) = x - \sin(x) \rightarrow 0 \quad (x \downarrow 0), \quad f'(x) = 1 - \cos(x)$$

$$g(x) = x \sin(x) \rightarrow 0 \quad (x \downarrow 0), \quad g'(x) = \sin(x) + x \cos(x).$$

Nun gilt $f'(x) \rightarrow 0 \quad (x \downarrow 0)$ und $g'(x) \rightarrow 0 \quad (x \downarrow 0)$
und wir versuchen unser Glück mit einer zweiten
Anwendung von 2.30 [d.h. anzuwenden auf f'/g']

$$f''(x) = \sin(x), \quad f''(x) \rightarrow 0 \quad (x \downarrow 0)$$

$$g''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x \sin(x), \quad g''(x) \rightarrow 2 \quad (x \downarrow 0)$$

Also gilt

$$\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \stackrel{\text{2.30, zum Ersten}}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \stackrel{\text{2.30, zum Zweiten}}{=} 0$$

4 INTEGRATION

In diesem Kapitel wenden wir uns der Integralrechnung zu, der zweiten tragenden Säule der Analysis neben der Differentialrechnung.

In §1 entwickeln wir den Integralbegriff für „schöne“ Funktionen auf absp. Intervallen. Genauer definieren wir das Riemann-Integral über den Zugang über Treppenfunktionen.

In §2 verknüpfen wir die Integral- mit der Differentialrechnung. Hier lernen wir das Hauptresultat der Vo kennen, den Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung, der selbsterklärend besagt, dass Differenzieren & Integrieren inverse Operationen sind. Dies ermöglicht unter anderem das explizite Berechnen von Integralen.

In §3 lernen wir den Satz von Taylor kennen, der es erlaubt „schöne“ Funktionen rein aus der Kenntnis ihrer Ableitungen in einem Punkt zu rekonstruieren.

In §4 werden wir uns schließlich mit uneigentlichen Integralen beschäftigen, also mit Integralen auf unbeschränkten Intervallen oder wo der Integrand gegen den Rand des Intervalls unbeschränkt ist.

§1 DAS RIEMANN-INTEGRAL

In diesem § entwickeln wir den Integralbegriff. Dabei gehen wir so vor, dass wir zunächst das Integral für eine Klasse einfache Fkt - der Treppenfkt - definieren. Dazu sind nur elementargeometrische Formeln notwendig (Flächeninhalt von Rechtecken). Das Integral für allgemeinere Funktionen wird dann mittels Approximation durch Treppenfkt definiert.

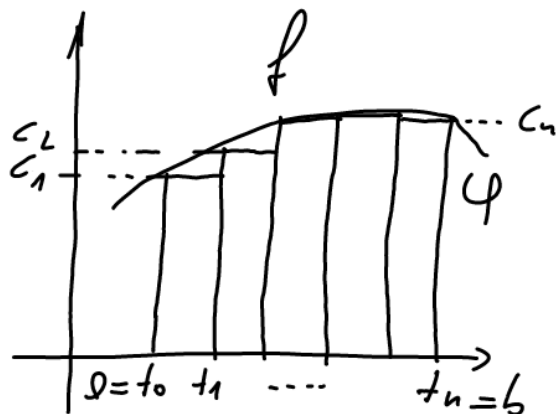
Wir beginnen mit einer

1.1.1 INTRO (Zwei Wege zum Integralbegriff)

(i) Geometrische Motivation. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine pos. Fkt. Wir wollen den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x -Achse bestimmen (Fläche unter dem Graphen).

Falls f "hinreichend flach" ist, dann können wir erwarten, dass die Fläche gut durch Rechtecksflächen approximiert werden kann.

Die Fläche der Rechtecke können wir aber auch als die Fläche unter dem Graphen einer Treppenfkt auffassen



(vgl. [2] Def 2.1(x) und Uth. 1.2iii unten)

Sei also $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfkt mit

$$[\varphi] \quad \varphi(t) = \begin{cases} c_1 & a = t_0 \leq t < t_1 \\ c_2 & t_1 \leq t < t_2 \text{ [sicher Skittle]}, \\ \vdots & \\ c_n & t_{n-1} \leq t < t_n = b \end{cases}$$

wobei $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ passend für f gewählt sind.
 Ein Näherungswert für die Fläche A unter dem Graphen von f ist die Fläche unter dem Graphen von φ - und diese können wir berechnen

$$\left\{ A \approx \sum_{j=1}^n c_j (t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \varphi(t_j) (t_j - t_{j-1}) \right\}$$

\swarrow \searrow
 Höhen Rechtecks Basis des Rechtecks

(ii) Rotation aus der Mechanik (vgl. [3] 1.11)

Sei $s: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die Ortsfunktion eines Massenpunkts P . ($s(t)$ gibt die Position von P zum Zeitpunkt t an.) Dann ist die Momentangeschwindigkeit $v: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ die Ableitungsfkt von s , also

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Wir stellen uns nun folgende Aufgabe: Angenommen, wir kennen $s(0)$, also den Ausgangspunkt von P

und wir kennen $v(t) \forall t \in [0, T]$. Wie können wir $s(t)$ für $0 \leq t \leq T$ bestimmen?

Betrachten wir dazu ein „kleines“ Zeitintervall $[t_1, t_2] \subseteq [0, T]$. Falls sich $v(t)$ auf $[t_1, t_2]$ wenig ändert (bzw. fast konstant ist), dann können wir hoffen, dass folgende Näherung gut ist: Wir bestimmen den „Wegverlauf“ (Ortszunahme) gemäß der „Formel“

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit} \end{array} \right.$$

bzw.

$$s(t) \approx s(t_1) + v(t_1)(t - t_1) \quad t \in (t_1, t_2)$$

Wenn wir diese Approximation auf den kleinen „Zeitintervallen“ $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n = T]$ durchführen und die Terme addieren, so erhalten wir die Näherung

$$\left\{ \begin{array}{l} s(T) = s(0) + \sum_{j=1}^n v(t_j)(t_j - t_{j-1}) \end{array} \right.$$

Bemerkenswert ist, dass wir auch hier die Summe als Fläche unter dem Graphen einer Treppenfkt φ auffassen können, genauer

$$\varphi(t) = v(t_j) \quad \text{für } t \in (t_{j-1}, t_j) \quad (j=1, \dots, n)$$

(iii) In beiden Fällen haben wir gesehen, dass sich Treppenfunktionen als Grundbausteine einer Integrationsstheorie anbieten (periodische aufdrängen). Daher beginnen wir damit ein Integral für Treppenfkt zu definieren & seine Eigenschaften zu studieren. Zunächst wiederholen wir die (etwas technisch anmutende) Def dieser Klasse (schöner \circledast) Fkt.

1.2. DEF (Treppenfkt)

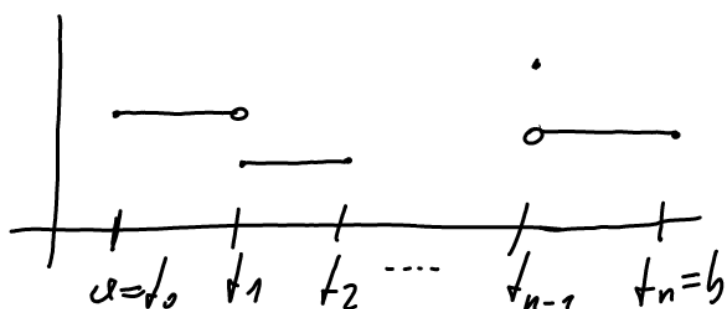
(i) Eine Fkt $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfkt, falls es eine endliche Zerlegung $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ des Intervalls $[a, b]$ gibt, d.h. die $[a, b]$ mit

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

• und Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ sodass

$$\varphi(t) = c_j \quad \text{falls} \quad t \in (t_{j-1}, t_j) \quad (j=1, \dots, n)$$

φ stückweise konst auf den offenen Intervallen; über $\varphi(t_j)$ wird nichts verlangt.



(ii) Wir bezeichnen die Menge der Treppenfkt auf $[a, b]$ mit

$$\mathcal{T}[a, b] := \{ \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist Treppenfkt.} \}$$

1.3 Lemma ($J[0,b]$ ist ein Vektorraum) Es gilt

- (i) $\varphi, \psi \in J[0,b] \Rightarrow \varphi + \psi \in J[0,b]$
 (ii) $\varphi \in J[0,b], \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\varphi \in J[0,b]$.

Mit anderen Worten $J[0,b]$ ist ein Vektorraum über \mathbb{R} ($J[0,b]$ ist ein Teilvektorraum von $\mathcal{D}^{[0,b]} := \{f: [0,b] \rightarrow \mathbb{R}\}$ dem VR aller reellen Fkt auf $[0,b]$.) [\leadsto Lineare Algebra]

Beweis. (ii) ist sofort klar nach Def [$\varphi(t) = c_j \ t \in (t_{j-1}, t_j)$]
 $\Rightarrow (\lambda\varphi)(t) = \lambda\varphi(t) = \lambda c_j \ t \in (t_{j-1}, t_j)$

(i) Aus den Zerlegungen $Z = \{t_0, \dots, t_n\}$ für φ und $Z' = \{t'_0, \dots, t'_m\}$ für ψ erhält man die Zerlegung $\tilde{Z} := Z \cup Z'$. Diese kann man als $\tilde{Z} = \{0 = s_0, s_1, \dots, s_e = b\}$ schreiben wobei φ und ψ und damit $\varphi + \psi$ auf (s_{j-1}, s_j) konstant ist (Details UE). □

1.4 DEF (Integral für Treppenfkt) Sei $\varphi \in J[0,b]$

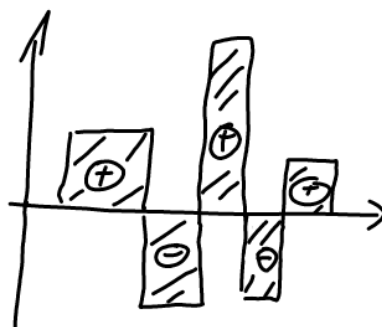
mit Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ und Werten $\varphi(t) = c_j \ (t \in (t_{j-1}, t_j), 1 \leq j \leq n)$. Wir definieren das Integral von φ auf $[0,b]$ als

$$\int_a^b \varphi(t) dt := \sum_{j=1}^n c_j (t_j - t_{j-1})$$

Wir schreiben oft auch $\int_a^b \varphi(t) dt$ statt $\int_a^b c_j (t_j - t_{j-1})$

1.5 Bem (zum Integral 1.4)

(i) Nochmal geometrische Deutung: Wie in 1.1(ii) diskutiert, ist für φ positiv $\int \varphi$ gerade die Fläche unter dem Graphen. Hat φ negative Werte, so werden gemäß Def 1.4 die entsprechenden Rechtecksflächen subtrahiert ($c_j < 0$?)



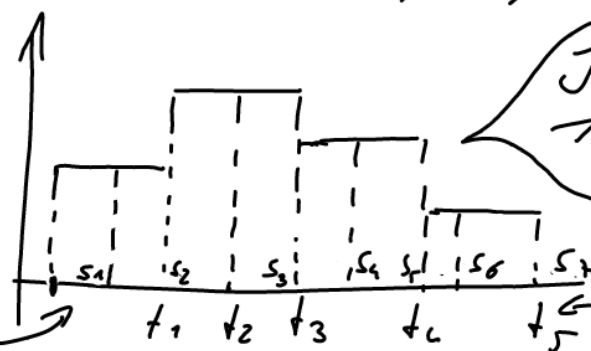
$\varphi \neq 0$

$\int \varphi$ kann auch negativ sein

(ii) Wohldefiniertheit. Strenggenommen, müssen wir noch zeigen, dass das Integral in 1.4 wohldefiniert ist. Genauer: Def 1.2(ii) verlangt für $\varphi \in J[0, b]$ die Existenz einer endl. Zerlegung - es könnte aber mehrere Zerlegungen für φ geben z.B.:

Def 1.3(ii) bezieht nicht $c_i \neq c_{i+1}$ μ

$a = t_0 = s_0$



jede Zerlegung kann unnötige Teilungspunkte haben

$b = t_n = s_n$

Def 1.4 bezieht sich aber auf eine bestimmte Zerlegung und es ist zu zeigen, dass $\int \varphi$ nicht von der Wahl einer bestimmten Zerlegung abhängt.

Das ist prophatisch evident, allerdings etwas auf-

wenig genau hinschreiben [siehe [Hö] Lemma in P. 2, [F] Bem p. 18].

[Der springende Punkt ist, dass die „unnötigen“ Teilungspunkte keinen Schaden anrichten – aber Arbeit machen.]

(iii) Die Wohldefiniertheit des Integrals 1.4 erlaubt es uns das Integral als Abbildung aufzufassen

$$\int: \mathcal{T}[0, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \mapsto \int_0^b \varphi(t) dt.$$

Dieser Standpunkt erlaubt es, bestimmte Eigenschaften des Integrals strukturell besser zu formulieren und zu verstehen. z.B. besagt die nächste Prop, dass \int ein

lineares Funktional [im Sinne der lin. Algebra] auf dem VR $\mathcal{T}[0, b]$ ist, das zusätzlich monoton ist.

1.6 Prop (Linearität & Monotonie des \int auf $\mathcal{T}[0, b]$)

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[0, b]$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$(i) \int_0^b (\varphi + \psi)(t) dt = \int_0^b \varphi(t) dt + \int_0^b \psi(t) dt$$

$$(ii) \int_0^b (\lambda \varphi)(t) dt = \lambda \int_0^b \varphi(t) dt$$

$$(iii) \varphi \leq \psi \Rightarrow \int_0^b \varphi(t) dt \leq \int_0^b \psi(t) dt$$

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in [0, b]$$

Beweis. (i) Verwende für φ, ψ eine gemeinsame Feilepfung wie im Beweis von Lemma 1.3. Die gewünschten Eigenschaften folgen dann sofort aus korrespondierenden Eigenschaften für endliche Summen [Debit ev. UE].

(ii), (iii) klar. □

1.7 MOTIVATION (Der Riemann-Integral)

(i) Wir haben also einen vernünftigen Integralbegriff für besonders schöne Fkt, die Treppenfunktionen definiert.
 d.h. mit guten Eigenschaften als als lin. mon. Funktional

Unser nächstes Ziel ist es, diesen Integralbegriff unter Beibehaltung dieser vernünftigen Eigenschaften auf eine größere Klasse von Fkt auszuweiten.

(ii) Die Grundidee ist dabei die folgende: Gegeben eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dann betrachten wir alle Treppenfkt $\varphi \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $f \leq \varphi$ und das inf der Integrale über alle solchen φ , also

$$\alpha := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathcal{T}[a, b], f \leq \varphi \right\}.$$

Ebenso können wir alle $\psi \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $\psi \leq f$ und ihre Integrale betrachten und setzen

$$\beta := \sup \left\{ \int_a^b \psi(t) dt \mid \psi \in \mathcal{T}[a, b], \psi \leq f \right\}$$

Falls diese beiden Zahlen übereinstimmen [i.e. gilt $\beta \leq \alpha$], dann werden wir $\int_a^b f(x) dx = \alpha = \beta$ definieren.



(iii) Wie zwingend ist diese Vorgehensweise?

Sie ergibt sich zwingend, falls

(1) das neue Integral für Treppenfkt mit dem Integral 1.4 übereinstimmen soll, und

(2) $f \leq g \Rightarrow \int_0^b f(t) dt \leq \int_0^b g(t) dt$ gelten soll.

Denn für alle $\varphi \in \mathcal{T}[0, b]$, $f \leq \varphi$ gilt dann $\int_0^b f(t) dt \leq \int_0^b \varphi(t) dt$
 also $\int_0^b f(t) dt \leq \alpha$ und für alle $\varphi \in \mathcal{T}[0, b]$, $\varphi \leq f$ gilt
 $\int_0^b \varphi(t) dt \leq \int_0^b f(t) dt$, also $\beta \leq \int_0^b \varphi(t) dt$.

Insgesamt also
$$\beta \leq \int_0^b f(t) dt \leq \alpha$$

und falls $\alpha = \beta$ ergibt sich zwingend $\int_0^b f(t) dt = \alpha = \beta$.

Nun offiziell:

1.8. DEF (Riemann-Integral) Sei $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

(i) Wir definieren das Ober- bzw. Untersintegral von f ab

$$\int_0^b \! \! \! \times f(t) dt := \inf \left\{ \int_0^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathcal{T}[0, b], f \leq \varphi \right\} \text{ bzw.}$$

$$\int_0^b \! \! \! \times f(t) dt := \sup \left\{ \int_0^b \varphi(t) dt \mid \varphi \in \mathcal{T}[0, b], \varphi \leq f \right\}.$$

(ii) Wir nennen f Riemann-integrierbar, falls

$$\int_0^b \! \! \! \times f(t) dt = \int_0^b \! \! \! \times f(t) dt.$$

In diesem Fall definieren wir das Riemann-Integral von f von 0 nach b als

$$\int_0^b f(t) dt := \int_0^b \! \! \! \times f(t) dt$$

1.9 BSP (\mathbb{R} -intbar & nicht \mathbb{R} -intbar Fkt.)

(i) Treppenfkt. Wie erwartet (& gewünscht) sind Treppenfkt \mathbb{R} -intbar und das \mathbb{R} -Integral stimmt mit dem Integral 1.4 überein.

Tatsächlich für $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$ gilt

$$\int_a^b \varphi^*(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \varphi_*(t) dt$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ } \mathbb{R}\text{-intbar} \text{ \& } \mathbb{R}\text{-}\int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt.$$

Integral 1.5

Somit mit "Integral 1.4" übereinstimmend, da die beiden Quotienten...

(ii) Die Dirichletfkt $X_{\mathbb{Q}}$ ist nicht \mathbb{R} -intbar.

$$X_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ ist beschränkt auf } \mathbb{R} \text{ also auch auf jedem } [a,b].$$

Allerdings enthält jedes offene Intervall rationale und irrationale Zahlen [1.11(ii)] daher gilt

$$\varphi \in \mathcal{T}[a,b], X_{\mathbb{Q}} \leq \varphi \Rightarrow \varphi \geq 1 \text{ auf jedem Teilintervall eine Zerlegung}$$

$$\varphi \in \mathcal{T}[a,b], \varphi \leq X_{\mathbb{Q}} \Rightarrow \varphi \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b X_{\mathbb{Q}}(t) dt = 1 \neq 0 = \int_a^b X_{\mathbb{Q}}(t) dt$$

1.10 MOTIVATION (Integrierbarkeitskriterium)

Auch bei genauer Betrachtung erweist sich die Def der \mathbb{R} -Intbarkeit als sperrig und schwer

handhabbar. Abhilfe schafft das folgende Integrierbarkeitskriterium, das besagt dass ein beschränktes $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann \mathbb{R} -integrierbar ist, falls es zwischen 2 Treppenfunktionen φ, ψ "eingezwickelt" werden kann $[\varphi \leq f \leq \psi]$ deren Integrale beliebig nahe beieinander liegen.

Diese Charakterisierung ist nur eine milde Umformulierung der Def und ebenfalls etwas technisch. Sie wird es uns aber ermöglichen ganze Klassen von Fkt, nämlich stetige Fkt & monotone Fkt als integrierbar zu entlocken.

1.11 THM (Integrierbarkeitskriterium: Einzwicken zur Treppenfkt)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt

f ist \mathbb{R} -integrierbar $(\Leftrightarrow) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$0 \leq \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt \leq \varepsilon$$

klar wegen
1.6ciii)

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Def der \mathbb{R} -Integrierbarkeit & den Eigenschaften von inf & sup. (evUE) \square

1.12 KOR (stetige Fkt & mon Fkt sind \mathbb{R} -integrierbar)

- (i) Jede stetige $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist \mathbb{R} -integrierbar
- (ii) Jedes monotone $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist \mathbb{R} -integrierbar

Zum Beweis von (i) benötigen wir ein Resultat, das
vieler von dem verwendet, was wir über stetige Fkt auf
kompakten Intervallen wissen [vgl. 12] 2.1].

1.13 SATZ (Approximation stetiger Fkt durch Treppenfkt)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ mit den Eigenschaften

(a) $\varphi \leq f \leq \psi$

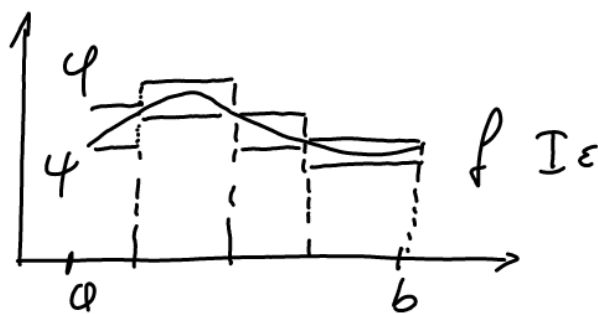
(b) $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$.

(1) f ist glm stetig [12] Thm 7.16]

$\stackrel{12] 2.14}{\implies} \exists \delta > 0$ sodass

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \forall x, x' \in [a, b] \text{ mit } |x - x'| < \delta \quad (*)$$



(2) (Konstruktion von φ, ψ)

Sei n so groß, dass $\frac{b-a}{n} < \delta$. (**)

Wir definieren eine (gleichdistanzte) Zerlegung von $[a, b]$

via
$$t_k := a + k \frac{b-a}{n} \quad (k=0, \dots, n)$$

Es gilt dann $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $|t_k - t_{k+1}| < \delta$ (***)

Die Funktionswerte der Treppenfunktionen definieren

wir via $(1 \leq k \leq n)$

$$c_k := \sup \{ f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k \}$$

$$c_k' := \inf \{ f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k \}. \quad (\Delta)$$

Wir setzen $\varphi(a) := f(a) =: \varphi(a)$ und $(1 \leq k \leq n)$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(t) := c_k \quad t_{k-1} < t \leq t_k \\ \varphi(t) := c_k' \quad t_{k-1} < t \leq t_k \end{array} \right\}$$

(3) Nun setzen (a) noch Konstruktion (vgl. (Δ)) und (b), denn

(2) Thm 2.11 $\Rightarrow \exists \xi_k, \xi_k' \in [t_{k-1}, t_k] \quad (1 \leq k \leq n)$:

$$f(\xi_k) = c_k, \quad f(\xi_k') = c_k'$$

$$\stackrel{(***)}{\Rightarrow} |\xi_k - \xi_k'| < \delta \stackrel{(*)}{\Rightarrow} |c_k - c_k'| < \varepsilon.$$

□

Beweis von 1.12:

(i) Sei $\varepsilon > 0$. $\stackrel{1.13}{\Rightarrow} \exists \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$
und $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon / (b-a) \quad (*)$

Daher gilt

$$0 \leq \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b \psi(t) dt$$

1.6(iii) \nearrow

1.6(i), (iii) \rightarrow

$$= \int_a^b (\varphi(t) - \psi(t)) dt \stackrel{(*)}{\leq} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt \stackrel{1.6(iii)}{=} \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Zerlegung
 $a = t_0 < t_1 = b$

1.11
 $\Rightarrow f$ ist R-intbar

(ii) Wir beweisen nur den Fall f mon. wachsend (der fallende Fall ist analog).

Wir konstruieren (wie in Bez 1.13, Schritt (2)) eine (äquidistante) Zerlegung von $[a, b]$ via

$$t_k = a + k \frac{b-a}{n} \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

Zur Konstruktion der Treppenfkt sehen wir

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(t_{k-1}) & t_{k-1} \leq t < t_k \\ \varphi(t) &= f(t_k) \\ \varphi(b) &:= f(b) =: \varphi(b) \end{aligned}$$

f mon. wachsend $\Rightarrow \varphi \leq f \leq \varphi$

Außerdem gilt

$$0 \leq \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b f(t) dt$$

$$= \sum_{k=1}^n f(t_k) (t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(t_{k-1}) (t_k - t_{k-1})$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t_{k-1}))$$

$$\stackrel{\text{Teleskops.}}{=} \frac{b-a}{n} (f(t_n) - f(t_0)) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Also gilt $\forall \varepsilon > 0$, dass $0 \leq \int_a^b \varphi(t) dt - \int_a^b f(t) dt < \varepsilon$, falls nur n groß genug ist $\stackrel{\text{1.11}}{\implies} f$ R-int. □

1.14 MOTIVATION (Grundeigenschaften - zum Zweiten)

Nochdem wir nun den Integralbegriff auf eine größere Klasse von Fkt ausgedehnt haben, überzeugen wir uns davon, dass er auch vernünftig ist - in dem Sinn, dass die Grundeigenschaften aus 1.6 erhalten bleiben (vgl. 1.7). Dass diese von großem Nutzen sind, haben wir gerade auch im letzten Beweis gesehen, wo 1.6 wesentlich an mehreren Stellen eingesetzt ist.

1.15 Prop (Linearität & Monotonie des \mathbb{R} -Integral)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{R} -inthalter und sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$(i) \quad f+g \text{ ist } \mathbb{R}\text{-inthalter und } \int_a^b (f+g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

$$(ii) \quad \lambda f \text{ ist } \mathbb{R}\text{-inthalter und } \int_a^b (\lambda f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

$$(iii) \quad f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

Beweis. (i) Sei $\varepsilon > 0$, dann wählen wir $\varphi_j, \psi_j \in \mathcal{J}[0, b]$

($i, j=1, 2$) mit $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$, $\varphi_2 \leq g \leq \psi_2$ und ($1 \leq i, j \leq 2$)

$$0 \leq \int_a^b \varphi_j - \int_a^b \psi_j \leq \varepsilon/2 \quad [1.11].$$

Dann sind $\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2 \in \mathcal{J}[0, b]$ [1.3(ii)] und es gilt

$$\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2) \leq f + g \leq \int_a^b (\psi_1 + \psi_2) \quad [1.6(i), (iii)]$$

$$\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2)(t) dt - \int_a^b (\psi_1 + \psi_2)(t) dt \leq \varepsilon$$

← NICHT VORLESEN

und somit ist $f+g$ \mathbb{R} -integrierbar lt. 1.11.

Außerdem gilt [1.8(ii)]

$$\int_0^b f + \int_0^b g = \int_{0^*}^b f + \int_{0^*}^b g \leq \int_{0^*}^b (f+g) = \int_a^b (f+g)$$

Seien ψ_1, ψ_2 wie im Sup in 1.8(ii) für f bzw. g .
Dann ist $\psi_1 + \psi_2$ zulässige Fkt im Sup für $f+g$.

$$= \int_0^{b^*} (f+g) \leq \int_0^{b^*} f + \int_0^{b^*} g = \int_0^b f + \int_0^b g$$

analog. inf

und da der erste Ausdruck gleich dem letzten ist, gilt immer $=$ statt \leq und wir erhalten

$$\int_0^b f + \int_0^b g = \int_a^b (f+g)$$

(ii) ähnlich wie (i) [separat für $d=0, d>0, d=-1, d<0$]

(iii) Sofort klar aufgrund der Def $[\int^d f = \int^* f]$ \square

1.16 Motivation (In Richtung Δ -Ungl für f)

Unser nächstes Ziel ist es, die Δ -Ungleichung für Integrale – eine sehr wichtige Abschätzung –

$$\left| \int_0^b f(t) dt \right| \leq \int_0^b |f(t)| dt$$

herzuleiten. Wie schon der Name andeutet, kann sie als Verallgemeinerung der Δ -Ungl $|x+y| \leq |x|+|y|$ bzw. der verallgemeinerten Δ -Ungl (vgl. Bew [2] 4.42)

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

NICHT VORLESUNG

aufgefasst werden. Dazu benötigen wir folgende Begriffe - die auch unabhängig wichtig sind

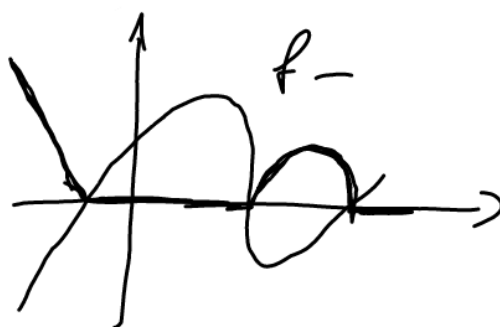
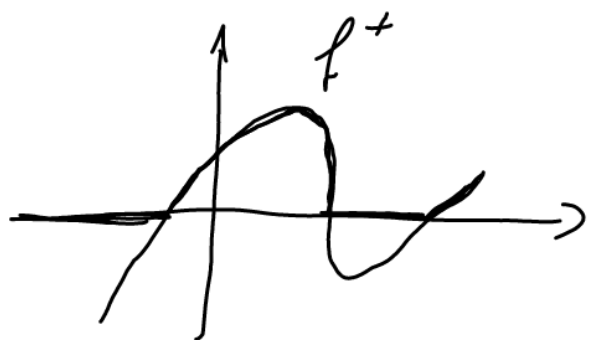
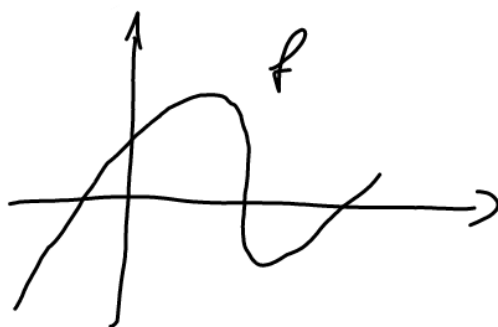
1.17 DEF (positiver & negativer Teil einer Fkt)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren positiven und negativen Teil von f als

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad f_-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1.18 BEW (zu f^+ , f_- und $|f|$)

(i) Folgende Skizze illustriert Def 1.17:



(ii) Offensichtlich gilt

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_-(x) = -\min(f(x), 0),$$

$$f = f^+ - f_-, \quad |f| = f^+ + f_- \quad \text{und}$$

$$f \leq g \Rightarrow f^+ \leq g^+, \quad g_- \leq f_- \quad [\text{Details UE}]$$

1.19 PROP (Δ -Ungl für \mathbb{R} -f)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{R} -integrierbar, dann sind auch f^+ , f^- und $|f|$ \mathbb{R} -integrierbar und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Beweis • Wir beweisen zuerst die \mathbb{R} -Integrierbarkeit von f^+ . Sei $\varepsilon > 0$

1.11 $\Rightarrow \exists \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$0 \leq \int \psi - \int \varphi \leq \varepsilon$$

Nun sind φ^+ und $\psi^+ \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $\varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+$ und

es gilt $\psi^+ - \varphi^+ = \psi_- \leq \varphi_- = \psi - \varphi \Rightarrow \psi^+ - \varphi^+ \leq \psi - \varphi \Rightarrow$

1.18(ii)

$$0 \leq \int \psi^+ - \int \varphi^+ \leq \int \psi - \int \varphi \leq \varepsilon$$

1.11 $\Rightarrow f^+$ ist \mathbb{R} -integrierbar

- Die \mathbb{R} -Integrierbarkeit von f^- folgt analog
- $|f|$ ist \mathbb{R} -integrierbar wegen $|f| = f^+ + f^-$ und 1.15(ii)
- Schließlich gilt wegen $f \leq |f|$, $-f \leq |f|$ mit 1.15(iii) $\int f \leq \int |f|$ und $-\int f \leq \int |f|$ und somit

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

1.20 KOR (Integrierbarkeit von Produkten)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{R} -integrierbar. Dann gilt

(i) $\forall p \in (\mathbb{R}, \infty)$: $|f|^p$ ist \mathbb{R} -integrierbar

(ii) $f \cdot g$ ist \mathbb{R} -integrierbar

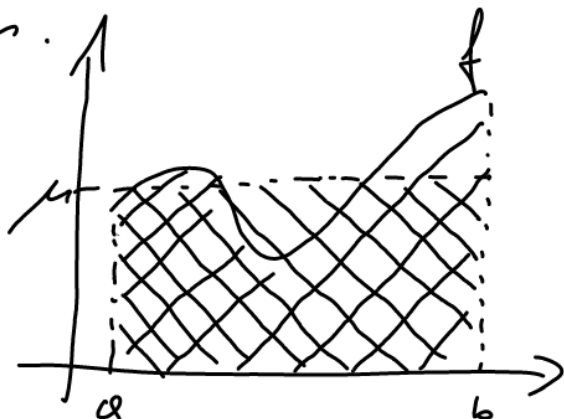
Beweis. siehe [Hö S. 11 Prop (iii), (iiii)]

□

1.21 Motivation (MWS der Integralrechnung)

(i) Sei $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig & positiv. Dann ist f \mathbb{R} -integrierbar [1.12 (i)] und $\int_0^b f(t) dt$ oft entspricht der Fläche A unter dem Graphen.

Anscheinlich ist klar dass es ein Rechteck der Höhe μ über $[0, b]$ geben muß, das den gleichen Flächeninhalt hat, also $\mu(b-0) = A$ gilt.



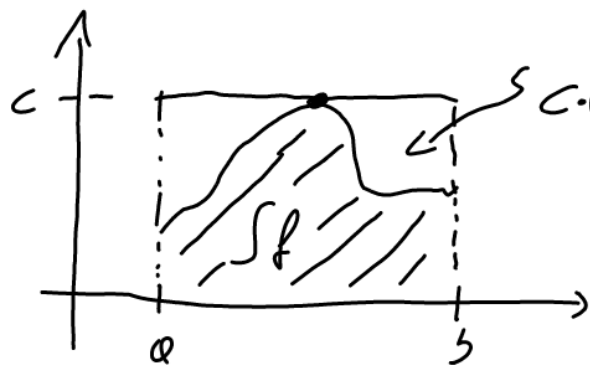
Dies ist offensichtlich der Fall, wie die nächste Prop zeigt. Zusätzlich besagt diese MWS der Integralrechnung, dass es ein $\xi \in [0, b]$ gibt mit $f(\xi) = \mu$. Also zusammengefasst:

$$\exists \xi \in [0, b] : \int_0^b f(t) dt = f(\xi)(b-0) \quad (*)$$

(ii) Ähnlich wie der MWS der Differentialrechnung kann der MWS der Integralrechnung hervorragend dazu verwendet werden, um Abschätzungen herzuleiten [vgl. 1.3] 2.13]. Gilt z.B. $f(x) \in C \forall x \in [0, b]$, dann folgt sofort aus (*),

$$\int_0^b f(t) dt \leq C(b-0).$$

Diese Abschätzung lässt sich auch graphisch verstehen:



Die Fläche des Rechtekes über $[0, b]$ mit Höhe c ist sicher größer als $\int_0^b f(t) dt$.

(iii) Wir formulieren nun den MWS-Ist exakt und beginnen mit einer etwas alternativen Version

1.22 Prop (MWS der Integralrechnung)

Seien $f, \varphi: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [0, b]$ sodass

$$\int_0^b f(t) \varphi(t) dt = f(\xi) \int_0^b \varphi(t) dt.$$

Insbesondere ergibt sich mit $\varphi(t) = 1 \quad \forall t \in [0, b]$

$$\int_0^b f(t) dt = f(\xi) (b-0)$$

Beweis. (einfach kurz)

f stetig auf $[0, b]$ $\xrightarrow{[2] 2.11}$ f beschränkt, d.h.

$m := \inf \{ f(x) \mid x \in [0, b] \}$ und

$M := \sup \{ f(x) \mid x \in [0, b] \}$ existieren

$$\begin{aligned} \Rightarrow m &\leq f \leq M \stackrel{\varphi \geq 0}{\Rightarrow} m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi \\ \stackrel{1.15(iii)}{\Rightarrow} m \int_0^b \varphi &\leq \int_0^b f\varphi \leq M \int_0^b \varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists \mu \in [m, M]: \int_0^b f \, d\varphi = \mu \int_0^b \varphi$$

ZWS $\Rightarrow \exists \xi \in [0, b]$ mit $f(\xi) = \mu$, also

$$\int_0^b f \, d\varphi = f(\xi) \int_0^b \varphi .$$

]

1.23 BEM (Teilintervalle & Orientierung)

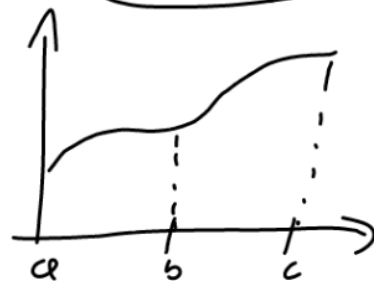
(i) Seien $a < b < c$ und $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ergibt sich durch Zusammenfügen der entsprechenden Treppenfkt.

f ist \mathbb{R} -integrierbar $\Leftrightarrow f|_{[a, b]}$ & $f|_{[b, c]}$ sind \mathbb{R} -integrierbar

Einschränkung von f auf $[a, b]$ bzw. $[b, c]$

In diesem Fall gilt

$$\left\{ \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \right\}$$



(ii) Wir treffen folgende Vereinbarung. Falls $b < a$, dann sehen wir

$$\int_a^b f(t) \, dt := - \int_b^a f(t) \, dt .$$

Das reflektiert die Idee, dass die x -Achse in Richtung positiver Werte von x orientiert ist.

(iii) Wir setzen $\int_a^a f(t) \, dt = 0$.

1.24 BEM (Riemansummen)

In dieser Bemerkung diskutieren wir einen wichtigen alternativen Zugang zum \mathbb{R} -Integral, der eine etwas einfachere Berechnung des \mathbb{R} -Integral erlaubt [die Methode Integrale zu berechnen folgt im nächsten §] und oft auch als Definition verwendet wird.

Wir beginnen mit einer (technischen) Definition

(i) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $Z := \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$.

Wir wählen in jedem der Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ einen Punkt $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, genannt Stützstelle.

Teilungspunkte t_j ($0 \leq j \leq n$) und Stützstellen ξ_j ($1 \leq j \leq n$) fassen wir zusammen zu

$$[\text{Zerlegung } Z] \rightarrow \mathcal{Z} := \left((t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n \right)$$

und definieren die Riemann-Summe von f bzgl \mathcal{Z} als

$$S(\mathcal{Z}, f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (t_k - t_{k-1})$$

Rechteckflächen mit Breite = Abstand der resp. Teilungspkte und Höhe = f an der entspr. Stützstelle

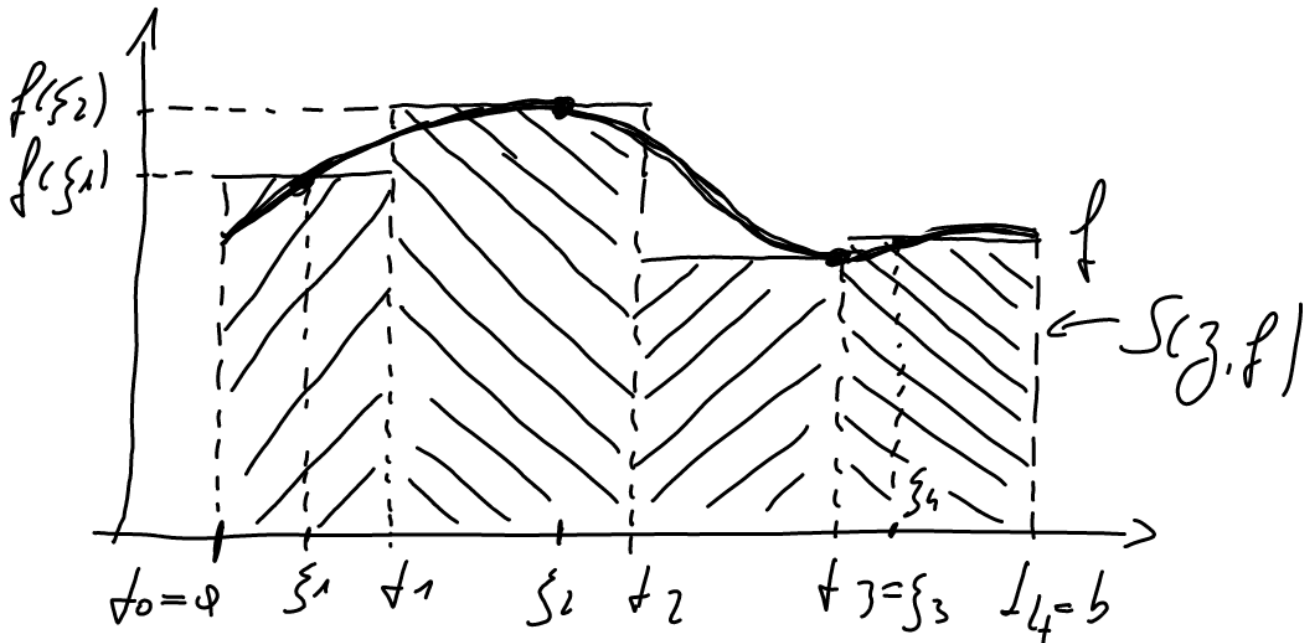
Wir nennen

$$\mu(\mathcal{Z}) = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$$

← Länge des
größten Teilintervalls

die Feinheit der Zerlegung \mathcal{Z}

(ii) Wir können diese Def graphisch veranschaulichen:



Wir sehen, dass die R-Summe ob Fläche unter dem Graphen eine Treppenfkt φ interpretiert werden kann, wobei:

$$\varphi(t) = f(\xi_i) \quad t \in (t_{i-1}, t_i) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

und daher genauer

$$\int_0^b \varphi(t) dt = R(\mathcal{Z}, f)$$

φ interpoliert ob f an den Stützstellen ξ_1, \dots, ξ_n .

Riemanns ursprüngliche Idee war es nun, den Grenzwert von $R(\mathcal{Z}, f)$ für $\mu(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$ zu betrachten, also für immer feinere Zerlegungen bessere Approximationen durch an den Stützstellen interpolierende

Treppenfkt zu konstruieren.

Diese Fungung ist unserem eng verwandt. Lediglich die Bestimmung der approximierenden Treppenfkt ist etwas expliziter.

Da es im Limes $\mu(\mathcal{Z}) \rightarrow 0$ offensichtlich die Wahl der Stützstellen irrelevant wird, ist es nicht überraschend, dass beide Fungänge äquivalent sind. Genau gilt

(iii) TH 7.1: Sei $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt

f ist \mathcal{R} -integrabel $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ sodass für jede Zerlegung \mathcal{Z} mit $\mu(\mathcal{Z}) < \delta$

$$|S(\mathcal{Z}, f) - s| < \varepsilon$$

Die \mathcal{R} -Summen kommen s beliebig nahe, falls die Zerlegung nur fein genug ist.

In diesem Fall gilt $s = \int_0^b f(t) dt$

Beweis siehe [H5, 9.13] □

(iv) BSP. Wir berechnen exemplarisch das Integral $\int_0^1 t dt$ ($a > 0$) mittels \mathcal{R} -Summen.

Sei $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Wir wählen ob. Zerlegungspunkte $t_k := \frac{k \cdot a}{n}$ ($k=0, \dots, n$) und Stützstellen $\xi_k = t_k$. Dann ist also

Das ist erlaubt, vgl. (i) & es ist einfach?

$$\mathcal{Z} = \left((t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n \right) = \left(\left(\frac{k \cdot a}{n} \right)_{k=0}^n, \left(\frac{k \cdot a}{n} \right)_{k=1}^n \right)$$

und $\mu(\zeta) = \frac{\varrho}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Also ergeben sich die R-Summen

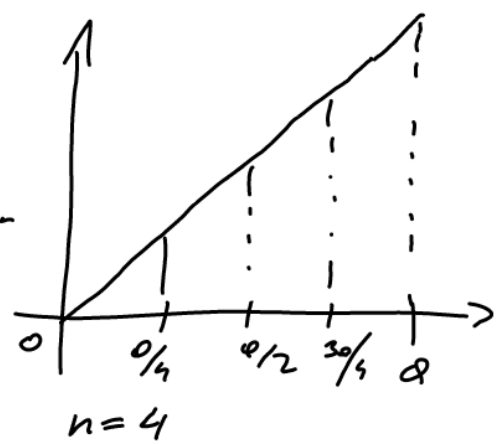
$$S_n = S(\zeta, f) = \sum_{k=1}^n \frac{k\varrho}{n} \cdot \frac{\varrho}{n}$$

$$= \frac{\varrho^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{\varrho^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{\varrho^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{\varrho^2}{2}$$

und somit

$$\int_0^{\varrho} t \, dt = \frac{\varrho^2}{2}$$

Dieses Ergebnis sieht man natürlich auch elementargeometrisch; richtig Integrale berechnen lernen wir im nächsten §.



§2 INTEGRAL & ABLEITUNG

2.1 INTRO. Im vorigen § haben wir den Begriff des Riemann-Integrals kennen gelernt & diskutiert.

Eine drängende Frage ist es nun: Wie berechnet man konkret ein Integral über z.B. eine stetige Fkt?

↳ jenseits von R-Summen

Der Schlüssel dazu liegt in der Zusammenführung des Integralbegriffs mit dem Differenzieren. Dies wird ultimotiv vom Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HSDI) erledigt, den wir gleich kennen lernen werden.

Wir beginnen mit formalen Vorbereitungen und dem Begriff der Stammfunktion.

2.2. DEF (Stammfunktion) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f auf I , falls

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

2.3 BSP (Stammfunktion)

$F(x) = x^2/2$ ist Stammfunktion von $f(x) = x$ auf \mathbb{R} ,

denn

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x = f(x).$$

2.4. MOTIVATION (2 Fragen zu Stammfkt.)

Zum Begriff der Stammfunktion ergeben sich unmittelbar & in natürlicher Weise die folgenden Fragen:

- (1) Gibt es immer eine Stammfkt und wenn ja wieviele Stammfkt gibt es? ← genauer: Welche f 's haben Stammfkt abseits von einfachen Bsp wie z.B. 2.3
- (2) Wie kann man Stammfunktionen systematisch beschreiben/berechnen?

Wir beantworten den "Eindeutigkeitsfall" in (1) in der nächsten Prop und den Rest von (1) und (2) im nächsten Theorem, dem HSDI.

2.5 PROP (Different von Stammfkt)

Sei $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Für $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

G ist (ebenfalls) Stammfkt von $f \iff F - G$ ist konstant

Bew. (\Rightarrow) G ist Stammfkt von $f \Rightarrow$ 13] 2.14(ii)

$$G' = f = F' \Rightarrow (F - G)'(x) = 0 \quad \forall x \in I \stackrel{\downarrow}{\Rightarrow} F - G \text{ konst.}$$

(\Leftarrow) Sei $G(x) = F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow G$ diffbar [Baukosten]

$$\text{und es gilt } G' = (F + c)' = F' = f. \quad \square$$

2.6 MOTIVATION (zum Programm aus 2.4)

Prop 2.5 sagt uns, wie wir alle Stammfkt einer gegebenen Fkt $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ berechnen, falls wir eine einzige Stammfkt haben (nämlich durch Addieren einer Konstanten).

Wie wir eine solche Stammfkt erhalten, falls f stetig ist, sagt u.o. der

2.7 THM: (Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und seien $a, b \in I$ beliebig.

(i) Die Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (*)$$

ist stetig differenzierbar ($F \in C^1(I)$) und $F' = f$.
Insbesondere ist F eine Stammfunktion von f auf I .

(ii) Sei F eine (beliebige) Stammfunktion von f , dann

gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Beweis: (Für so ein zentrales Resultat erstaunlich einfach und direkt)

(i) f stetig $\Rightarrow f$ \mathbb{R} -intbar und (*) ist sinnvoll, daher F definiert.

Wir berechnen den Differentenpot. von F in $x \in I$ beliebig. Sei $0 \neq h$ sodass $x+h \in I$ [oBdA $h > 0$ sonst analog]. Dann gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \quad (\Delta)$$

MWS $\Rightarrow \exists \xi_h \in [x, x+h]$ mit $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi_h) h \quad (\Delta\Delta)$

Bemerkung $\xi_h \rightarrow x$ falls $h \rightarrow 0$ [$|x - \xi_h| \leq |x - (x+h)| = |h| \rightarrow 0$].

Daher erhalten wir

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \stackrel{(\Delta), (\Delta\Delta)}{=} f(\xi_h) \rightarrow f(x).$$

Worum stimmt das auch intuitiv? $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$

$$\stackrel{(\Delta)}{=} \frac{\Delta}{h} \approx \frac{\Delta}{h} = f(x)$$

Also gilt $F' = f$ und somit ist F' auch stetig.

(ii) Definiere G wie in (*), also $G(x) = \int_0^x f(t) dt$
 $\Leftrightarrow G$ ist Stammfkt von f

Sei F beliebige Stammfkt von $f \stackrel{z.B.}{\Rightarrow} F = G + c \quad (c \in \mathbb{R})$
 Daher gilt

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f + \int_a^a f \stackrel{1.74(iii)}{=} \int_a^b f(t) dt.$$



2.8 BEM (Die Bedeutung des HsDI)

(i) Für die Pkte (i) & (ii) im HsDI bieten sich die folgenden Schreibweisen an (Notation wie im Thm.):

$$\left\{ \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x) \quad \text{bzw.} \quad \int_0^x F'(t) dt = F(x) - F(0) \right\}$$

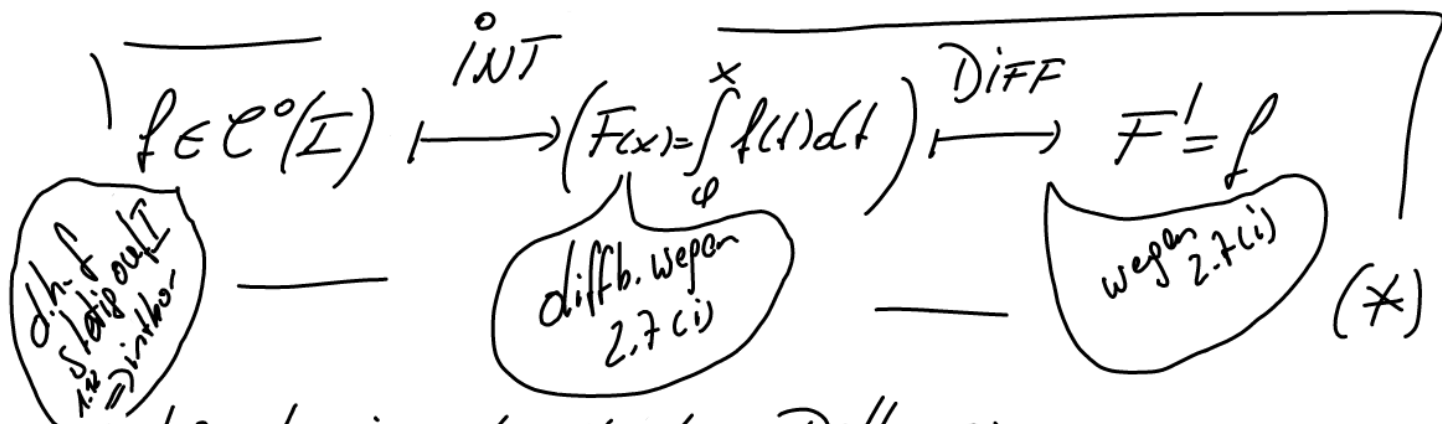
Diff von Int = Id

Int von Diff = Id bis auf eine Konstante

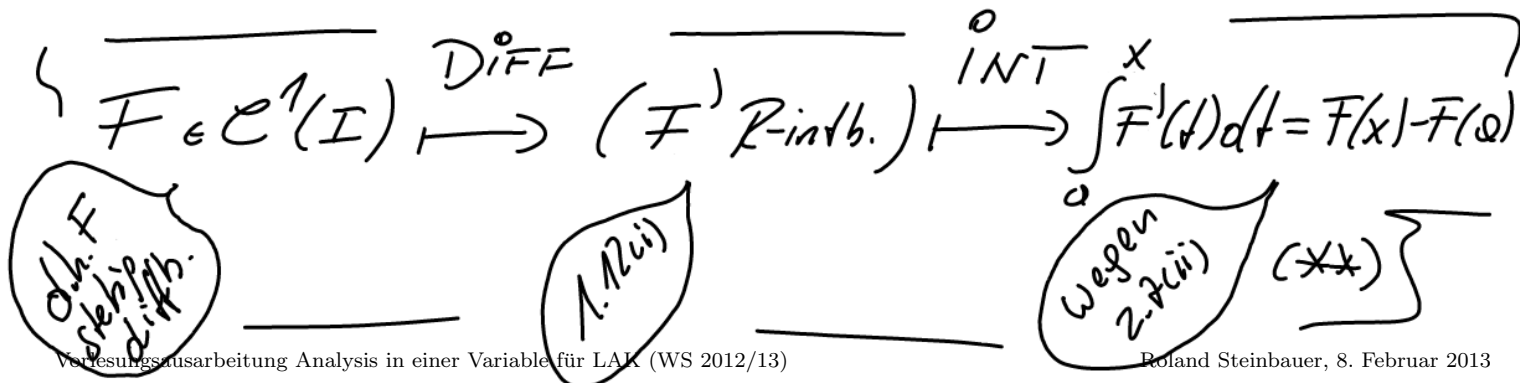
Spätestens jetzt wird klar, dass der HsDI besagt, dass

Differenzieren und Integrieren im wesentlichen "inverse Operationen" sind!

(ii) Etwas präziser können wir die Situation wie folgt darstellen (Notation wie im Thm.):



bzw. beginnend mit dem Differenzieren



(iii) Definieren wir die folgenden Abbildungen

Abbildungsoperator

$$D: \mathcal{C}^1(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$$

$$F \mapsto F'$$

Integraloperator

$$R: \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}^1(I)$$

$$f \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

Können wir wie folgt formulieren

R landet in \mathcal{C}^1 wegen 2.7(ii)

$$D \circ R = id: \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$$

wegen (*)

wegen (**)

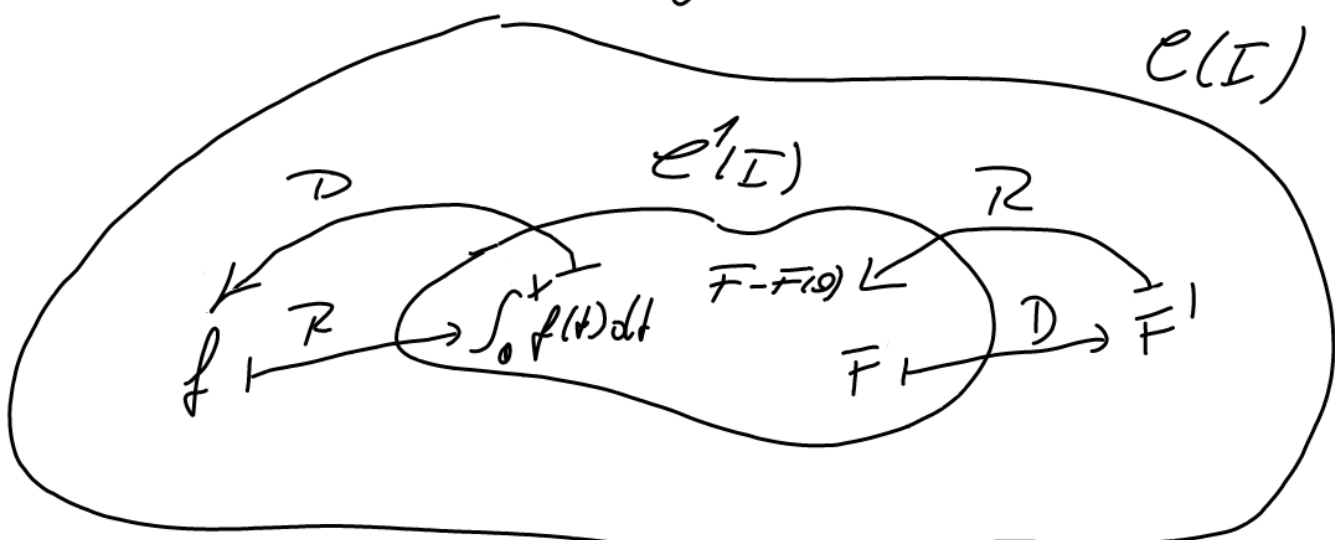
$$R \circ D: \mathcal{C}^1(I) \rightarrow \mathcal{C}^1(I) \text{ erfüllt}$$

$$R \circ D(F) = F - F(a)$$

nur fast die Id

(iv) Neben der Tatsache, dass $R \circ D$ nicht genau die Identität ergibt [$R \circ D = id + \text{Konstante}$] haben D & R unterschiedliche Def- & Zielbereiche. Daher sind D & R eben doch nicht genau invers zueinander. - die Details des Skopos aus (i) sind essenziell?

Eine lehrte Veranschaulichung der Situation ist:



2.9 Motivation (Konkretes Integrieren)

(i) Der HSDI und insbesondere Thm 2.7(ii), d. h.

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) =: F(t) \Big|_a^b$$

erlaubt es nun praktisch praktische Schreibweise
konkrete Integrale zu

berechnen: Wir müssen nur die Differenz der Werte
einer (beliebigen) Stammfunktion an der
Ober- bzw. Untergrenze bilden

(ii) Wie erhalten wir eine Stammfunktion? No durch
unsere Ergebnisse aus [3] über das konkrete Differenzieren?

(iii) Als einfaches Bsp betrachten wir $\int_0^b x^n dx$ ($1 \leq n \in \mathbb{N}$).
Wegen $(x^n)' = n x^{n-1}$ ([3] 1.8cii) gilt

$$\int_0^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^b$$

Bevor wir weitere einfache Bsp betrachten ein begründetes
Pomphlet!

2.10 BETT (Terminologische Katastrophe: unbestimmtes Integral)

(i) In vielen Texten findet man die Kurzschreibweise

$F(x) = \int f(x) dx$ und meint damit eine oder auch alle Stammfkt von f . Der Ausdruck

$$\int f(x) dx \quad (*)$$

wird dabei ob „unbestimmtes Integral“ bezeichnet.

(ii) Diese traditionell beide übliche Bezeichnung führt aber in eine echte terminologische Katastrophe!

Gander betrachten wir die folgenden Bezeichnungen:

	<u>BEI UNS</u>	<u>TRAD. ÜBLICH</u>
$\int_a^b f(x) dx$	Integral von f zu a und b	bestimmtes Integral v. f
F mit $F' = f$	Stammfkt von f	unbestimmtes Integral v. f

Die hochgradig nichttriviale Aussage (ii) im HS DL, die das produkt. Integrieren erst ermöglicht, lautet „bei uns“ (vgl. 2. P(ii))

Das Integral von f zu a und b ergibt sich als die Differenz der Werte einer Stammfkt v. f an Ober- bzw. Untergrenze

Die traditionelle Terminologie versteckt diese Aussage in der wintigen Vorsilbe eines Eigenschaftsworts:

Das bestimmte Integral von f ist gleich der Different der Werte eines unbestimmten Integrals von f an der Ober- bzw. Untergrenze.

(iii) Wir vermeiden daher die Bezeichnung „Unbestimmtes Integral“ und verwenden (*) ausschließlich im folgenden Sinn:

„bestimme $\int f(x) dx$ “ bedeutet „finde eine Stammfkt. o. f.“

2.11 Bsp (Höchste Zeit: konkretes Integrieren)

(i) Wir verallgemeinern 2.9(iii) auf $-1 \neq s \in \mathbb{R}$, $0, b > 0$.

Wegen $(x^s)' = s x^{s-1}$ [13] 1.79(i)] gilt

$$\int_0^b x^s dx = \frac{x^{s+1}}{s+1} \Big|_0^b \quad (*)$$

Für $s \in \mathbb{N}$ gilt (*) sogar für alle $0, b \in \mathbb{R}$.

(ii) Der Fall $s = -1$ in (i) führt auf ($0, b > 0$)

$$\int_0^b \frac{1}{x} dx = \log(x) \Big|_0^b \quad [13] 1.28(ii)]$$

(iii) $\int \sin(x) dx = -\cos(x)$, $\int \cos(x) dx = \sin(x)$ [13] 1.8(v)]

(iv) $\int e^x dx = e^x$ [13] 1.8(vi)] } beachte 2.10(ciii) }

(v) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$ [13] 1.29(iii)]

2.12 Motivation (Mehr Werkzeuge!)

Um auch kompliziertere Fkt integrieren zu können – deren Stammfunktion wir nicht so einfach mittels unserer Ergebnisse aus [13] „sehen“ – lernen wir nun

zwei wichtige Integrationsmethoden "kennen": die partielle Integration und die Substitutionsregel. Sie sind die "Umkehrungen" der Produktregel bzw. der Kettenregel der Differentialrechnung und können dementsprechend leicht aus der entsprechenden Regel und dem HsDI hergeleitet werden.

2.13 Prop (Partielle Integration) Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = (f(x)g(x)) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

Beweis. Wir setzen $F = fg$. Dann gilt $F' = f'g + fg'$ [13] 1.5 (ii)] und daher wegen 2.7 (ii)

$$(f(x)g(x)) \Big|_a^b = F(x) \Big|_a^b = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx. \quad \square$$

2.14 Bsp (Partielle Integration)

$$(i) \int \underbrace{\sin(x)}_{f'} \cdot \underbrace{\cos(x)}_g dx = -\cos^2(x) - \int \cos(x) \sin(x) dx$$

$$\Rightarrow \int \sin(x) \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x)$$

$$(ii) \int \log(x) dx \stackrel{\text{Trick}}{=} \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\log(x)}_g dx = x \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\int = x \log(x) - x$$

2.15 Prop (Substitutionsregel) Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

und sei $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar mit $\varphi([a, b]) \subseteq I$.

Dann gilt
$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

damit ist
Prop definiert

2.16 BEW (Zur Substitutionsregel)

(i) Prop 2.15 merkt man sich am einfachsten mit folgendem

Trick: Betrachte $x = \varphi(t)$ als „neue Variable“ für f , also $f(x) = f(\varphi(t))$. Dann gibt die folgende „formale“ Rechnung die richtige Transformation

$$(*) \quad dx = \frac{dx}{dt} dt = \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = \varphi'(t) dt.$$

Die oben
stehenden
Symbole sind
nicht definiert

Schließlich müssen noch die Integralgrenzen mittransformiert werden, d.h. $a \mapsto \varphi(a)$, $b \mapsto \varphi(b)$.

So erhalten wir tatsächlich

$$\int_a^b \underbrace{f(\varphi(t))}_{= f(x)} \underbrace{\varphi'(t) dt}_{= dx} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

(ii) Die Formel in 2.15 kann in beide Richtungen verwendet werden:

- von rechts nach links, falls wir einen komplizierten Integranden $f(x)$ vorliegen haben und wir ein passendes φ finden können, sodass $(f \circ \varphi) \varphi'$ leicht zu integrieren ist.

- von links nach rechts: Ein zunächst hübscher Integrand kann die Struktur $(f \circ \varphi) \varphi'$ haben (für passendes φ) und f kann leicht integrierbar sein.

2.17 Bsp (zur Substitutionsmethode)

(i) $\int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\frac{1}{2} \cos(x) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2} (-1 - 1) = \underline{\underline{1}}$

$\left[\begin{array}{l} x = \varphi(t) = 2t \\ dx/dt = 2 \end{array} \right]_0^{\pi}$

[von links nach rechts]

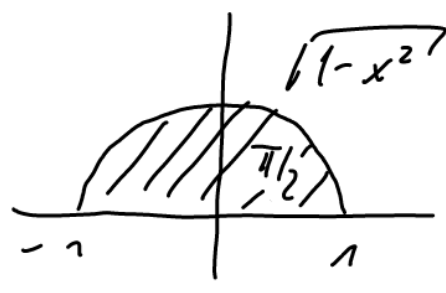
(ii) Etwas allgemeinere sei $c \neq 0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a < b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(ct) dt = \frac{1}{c} \int_0^b f(ct) c dt = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(x) dx$$

$\left[\begin{array}{l} \text{von links nach rechts} \\ x = \varphi(t) = ct \\ dx/dt = c \end{array} \right]$

(der besseren Sichtbarkeit wegen)

(iii) Die Fläche des Halbkreises:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) \cos(t) dt$$


Idee: Verwende $\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)}$ von rechts nach links

daher:

$$x = \varphi(t) = \sin(t)$$

$$dx/dt = \cos(t)$$

$$-1 \leq x = \sin(t) \leq 1$$

$$\arcsin(-1) \leq \arcsin(x) = t \leq \arcsin(1)$$

$$= -\pi/2 \leftarrow \rightarrow \pi/2$$

[2] 3.29cii)

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dt$$

$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ [2] 3.12cii)]

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\text{(ii)}, c=2}{=} \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t) dt + \frac{1}{2} t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4} \sin(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 & = \frac{1}{4} \left(\underbrace{\sin(\pi)}_0 - \underbrace{\sin(-\pi)}_0 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Beweis von 2.15: Sei F eine Stammfkt von f .

$\Rightarrow F \circ \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist diffbar

$$\stackrel{1.23}{\Rightarrow} (F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi \cdot \varphi' = f \circ \varphi \cdot \varphi'$$

$$\begin{aligned}
 \stackrel{2.7 \text{ (iii)}}{\Rightarrow} \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= (F \circ \varphi) \Big|_a^b \\
 &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.
 \end{aligned}$$

NICHT VORGETRAGEN

]

§4 UNEIGENTLICHE INTEGRALE

4.1 INTRO.

Der bisher entwickelte Integralbegriff ist für viele Anwendungen zu eng gefasst. Seine beiden "Schönheitsfehler" sind:

- Wir haben nur über komplette Intervalle integriert.
- \mathbb{R} -inh. Fkt sind notwendigerweise beschränkt.

Um Funktionen auch über unbeschränkte Intervalle zu integrieren und unbeschränkte Funktionen zu integrieren lernen wir nun die sog. uneigentlichen Integrale kennen. Diese werden wir unter geeigneten Bedingungen als Grenzwerte von Riemann-Integralen definieren. Wir betrachten 3 Fälle.

4.2 DEF (Uneig. I, Fall 1: Eine unendliche Intervallgrenze)

Sei $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt mit der Eigenschaft

f ist \mathbb{R} -inh. auf jedem Intervall $[a, R]$ mit $a < R < \infty$.

Falls $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(t) dt$ existiert und endlich ist, so

heißt das Integral $\int_a^\infty f(t) dt$ konvergent [$\int_a^\infty f < \infty$] und

Wir setzen

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(t) dt$$

Analog für $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Limes des
Fkt $\int_a^R f$

4.3 BSD (Uneip I, Foll 1)

$$(i) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} \quad \text{für } s > 1.$$

Tatsächlich gilt $1/x^s$ ist stetig und daher \mathbb{R} -integrabel auf jedem Intervall $[1, R]$ und

$$\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_1^R = \frac{1}{s-1} \left(1 - \frac{1}{R^{s-1}} \right) (*)$$

$$\rightarrow \frac{1}{s-1} \quad (R \rightarrow \infty) \quad \xrightarrow{\text{da } s > 1}$$

$$(ii) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \text{ divergiert für } s \leq 1, \text{ denn}$$

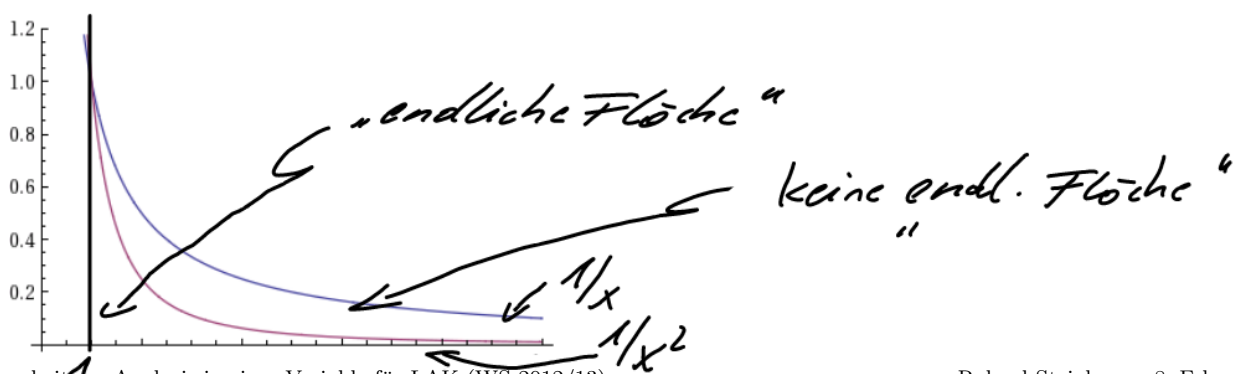
für $s \neq 1$ können wir die Rechnung in (*) verwenden und sehen $\frac{1}{s-1} \left(1 - \frac{1}{R^{s-1}} \right) \rightarrow \infty$.

Für $s=1$ gilt

$$\int_1^R \frac{dx}{x} = \log(x) \Big|_1^R = \log(R) \xrightarrow{[13] 3.8(ii)} \infty \quad (R \rightarrow \infty).$$

(iii) Insgesamt gilt also

$$\left\{ \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \text{ konvergiert} \Leftrightarrow s > 1 \right.$$



4.4 DEF (Uneig. \int , Foll 2. Integrand on einer Integrationsgrenze unbeschr. / undefiniert)

Sei $f: (0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit d. Eigenschaft

f ist \mathbb{R} -inthalte auf jedem Intervall $[\alpha + \varepsilon, b]$ ($\varepsilon > 0$)

Falls $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha + \varepsilon}^b f(t) dt$ existiert und endl. ist, so heißt das Integral $\int_{\alpha}^b f(t) dt$ konvergent ($\int_{\alpha}^b f < \infty$) und wir setzen

$$\int_{\alpha}^b f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha + \varepsilon}^b f(t) dt$$

Analog für $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

4.5 BSP (Uneig. Integral, Foll 2)

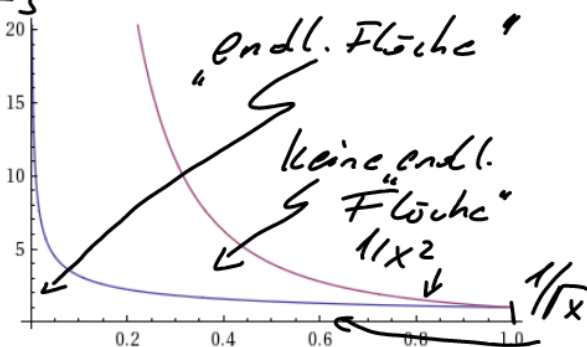
Es gilt $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ konvergiert $\Leftrightarrow s < 1$.

[$1/x^s$ ist undefiniert in $x=0$ falls $s > 0$]

Tatsächlich gilt für $s \neq 1$ und $1 > \varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^s} = \left. \frac{1}{1-s} x^{1-s} \right|_{\varepsilon}^1 = \frac{1 - \varepsilon^{1-s}}{1-s}$$

$$(\varepsilon \rightarrow 0) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-s} & s < 1 \\ \infty & s > 1 \end{cases}$$



Falls $s=1$ und $1 > \varepsilon > 0$, dann gilt

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \log(x) \Big|_{\varepsilon}^1 = -\log(\varepsilon) \xrightarrow{\text{3.8(ii)}} \infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

4.6 DEF (Unap-S, Fall 3: Kombinierte Fall - beide Integrationsgrenzen kritisch)

Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt m.d. Eig

f \mathbb{R} -intbar auf jedem Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $a < \alpha < \beta < b$.

Falls für ein beliebiges $c \in (a, b)$ die unendlichen Integrale $\int_a^c f(t) dt$ und $\int_c^b f(t) dt$ konvergieren, so

heißt das Integral $\int_a^b f(t) dt$ konvergent $[\int_a^b f < \infty]$ und wir sehen

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

4.7 BSD (Unap. Int., Fall 3)

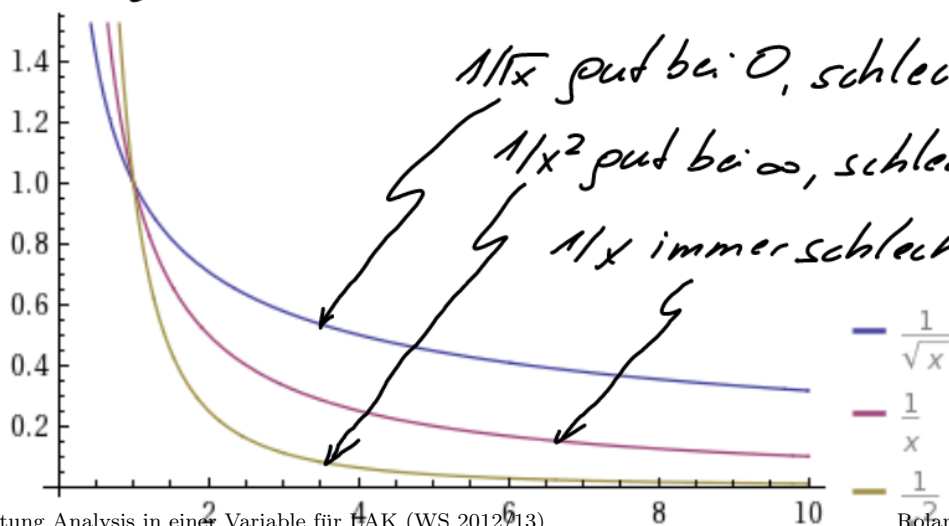
(i) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ divergiert $\forall s \in \mathbb{R}$

Diese Def ist unabhängig von der Wahl von c - ohne Beweis

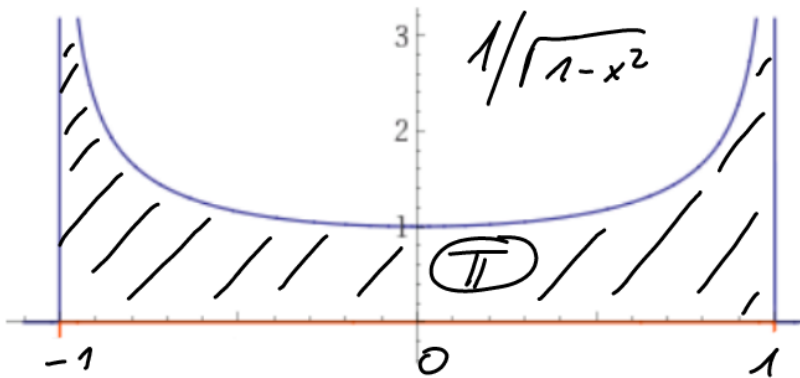
Tatsächlich siehe $c=1$, dann gilt

4.3 $\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$ div $\forall s \leq 1$

4.5 $\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^s} dx$ div $\forall s \geq 1$



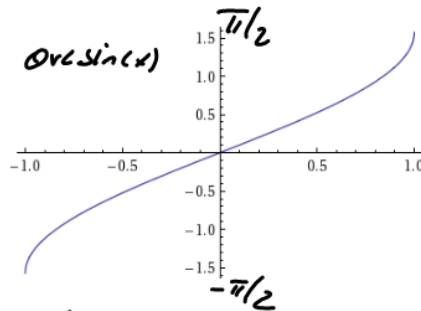
(ii) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$



denn es gilt

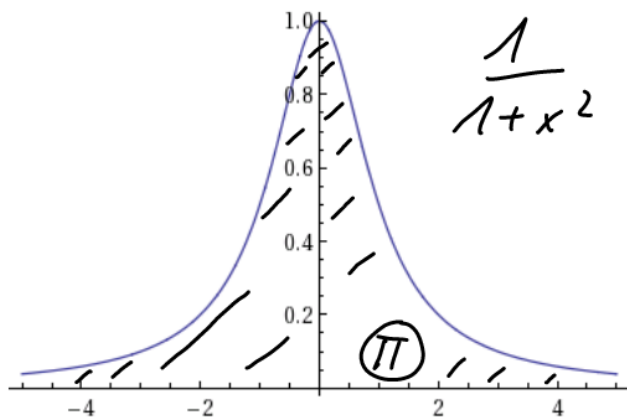
$\int_{-1+\epsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arcsin(1+\epsilon)$
 $\rightarrow -\arcsin(-1) = \pi/2 \quad (\epsilon \rightarrow 0)$

$\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(1-\epsilon)$
 $\rightarrow \arcsin(1) = \pi/2 \quad (\epsilon \rightarrow 0)$



Also gilt $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi/2 + \pi/2 = \pi$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$



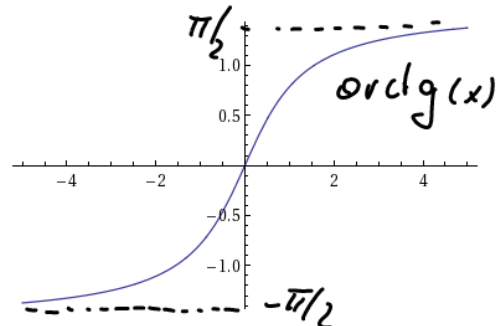
Sei $R > 0$, dann gilt

$\int_{-R}^0 \frac{dx}{1+x^2} = -\arctan(-R) \rightarrow \pi/2 \quad (R \rightarrow \infty)$

$\int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(R) \rightarrow \pi/2 \quad (R \rightarrow \infty)$

und daher

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2 + \pi/2 = \pi$



NICHT VORLESEN

4.8 MOTIVATION (Konvergenztests für unaj. Int.)

Went ähnlich zu den Konvergenztests für Reihen [2]§§ lassen sich Konvergenztests für unaj. Integrale formulieren, die es einem ersparen, die oft umständlichen Integrale, die in den Defs geklopft sind zu berechnen.

Wir formulieren die Tests nur für den Fall 1. Eine Anpassung an die Fälle 2 & 3 ist reine Routinearbeit, die wir hier unterlassen.

4.9 Prop (Konvergenztests f. unaj. Int.)

Sei $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wie in Def 4.7, d.h. f \mathbb{R} -intbar für jedes Intervall $[a, R]$ mit $0 < R < \infty$. Dann gilt:

(i) Cauchy-Prinzip:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R > a: \forall s, t > R$$

$$\int_a^\infty f(t) dt \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \left| \int_s^t f(t) dt \right| < \varepsilon$$

(ii) Majorantenkriterium: Sei $h: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h \geq 0$ und $\int_a^\infty h(t) dt$ konvergent. Falls

$$|f(x)| \leq h(x) \quad \forall x > a \Rightarrow \int_a^\infty f(t) dt \text{ konvergiert}$$

(iii) Minorantenkrit.: Sei $g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g \geq 0$ und $\int_a^\infty g(t) dt$ divergent. Falls

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x > a \Rightarrow \int_a^\infty f(t) dt \text{ divergiert.}$$

Beweis. (i) \Leftarrow : Sei (R_n) eine Folge mit $R_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$)
 Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $R > 0$ wie in der Bedingung.

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: R_n > R \quad \forall n \geq N$$

Voraus. $\Rightarrow \left| \int_{R_m}^{R_n} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$

$$a_n = \int_0^{R_n} f$$

$$|a_n - a_m| = \left| \int_0^{R_n} f - \int_0^{R_m} f \right|$$

$$= \left| \int_{R_m}^{R_n} f \right|$$

1) 3.16 $\Rightarrow \left(\int_0^{R_n} f(t) dt \right)_n$ ist eine Cauchy-Folge

1) 3.18 $\Rightarrow \left(\int_0^{R_n} f(t) dt \right)_n$ konvergiert $\stackrel{[3.14]}{\Rightarrow} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(t) dt \exists$

(i) \Rightarrow : Indirekt angenommen $\int_0^\infty f(t) dt$ konvergiert,
 aber die Bedingung auf der rechten Seite ist verletzt, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists r_n, s_n > r_n: \left| \int_{r_n}^{s_n} f(t) dt \right| \geq \varepsilon \quad (*)$$

Nun gilt aber $r_n \rightarrow \infty, s_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) und wir
 definieren eine neue Folge R_n durch Mischung von
 r_n & s_n , d.h.

$$R_{2k} = r_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$R_{2k+1} = s_k$$

Dann gilt $R_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) und weil $\int_0^\infty f(t) dt$ konv.

1) 3.14 $\Rightarrow \left(\int_0^{R_m} f(t) dt \right)_m$ konvergiert

1) 3.18 $\Rightarrow \left(\int_0^{R_m} f(t) dt \right)_m$ ist Cauchy-Folge

$$\Rightarrow \nexists \text{ zu } (*)$$

(ii) Folgt aus (i): Sei $\epsilon > 0$ und R wie in (i) für $\text{hundert} > R$

Dann gilt:

$$\left| \int_r^s f(x) dx \right| \stackrel{\text{1.15}}{\leq} \int_r^s |f(x)| dx \leq \int_r^s h(x) dx < \epsilon$$

(i) für $h \Rightarrow$ (ii) für f

(i) $\Rightarrow \int_a^\infty f < \infty$

(iii) Folgt sofort aus (ii): Indirekte Bedingung $\int_0^\infty f < \infty$

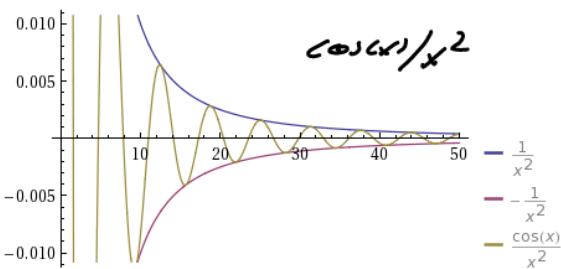
(iii) $\Rightarrow \int_0^\infty f < \infty \nrightarrow$ zur Voraussetzung.



4.10 Bsp (Konvergenztests)

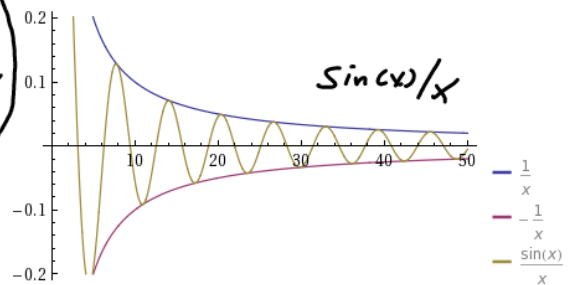
(i) $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ konvergiert wegen 4.8(ii):

(4.3(ii))



$$\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \text{ und } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ konv}$$

Majoranten-
kriterium
hier nicht so
oben?



(ii) $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ konvergiert

Wir wenden das Cauchy-Prinzip an: Seien $1 < r < s$ dann

$$\begin{aligned} \text{gilt } \left| \int_r^s \frac{\sin(x)}{x} dx \right| &\stackrel{\text{P.I.}}{=} \left| -\frac{\cos(x)}{x} \right|_r^s - \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2} dx \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \left| \frac{\cos(r)}{r} - \frac{\cos(s)}{s} \right| + \left| \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2} dx \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) + \int_r^s \frac{dx}{x^2} \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck wird beliebig klein für r, s groß $\left[\frac{1}{r}, \frac{1}{s} \rightarrow 0 \right]$

Bemerkung: Wir sind hier halt an der Grenze des Möglichen, denn $\int_1^\infty dx/x$ divergiert und auch $\int_1^\infty \cos(x)/x dx$!

und $\left| \int_r^s \frac{1}{x^2} \right| < \epsilon$ lt. Cauchy-Prinzip

4.11 Motivation (Integraltest für Reihen)

Die Analogie zwischen Konvergenztests für unep. Int. und Reihen erlaubt eine Verbindung zwischen den beiden herzustellen, den sog. Integraltest f.

Reihen (der die anderen Tests aus [2] §4 erweitert)

4.12 Prop (Integraltest für Reihen)

Sei $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine mon. fallende Fk. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(t) dt \text{ konvergiert}$$

Beweis: Wir definieren Treppenfkt $\psi, \varphi: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &:= f(n) \\ \varphi(x) &:= f(n+1) \end{aligned} \right\} (n \leq x < n+1)$$

f mon. fallend $\Rightarrow \psi \leq f \leq \varphi$

Integration über $[1, N]$ liefert

$$\sum_{n=2}^N f(n) = \int_1^N \psi(t) dt \leq \int_1^N f(t) dt \leq \int_1^N \varphi(t) dt = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Daher

$$\int_1^{\infty} f < \infty \Rightarrow S_N = \sum_{n=1}^N f(n) \text{ beschränkt} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} f(n) < \infty \text{ \& umgekehrt}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \Rightarrow \forall$ mon. wach. Folgen R_n mit $R_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ gilt

$$\left(\int_1^{R_n} f(t) dt \right)_n \text{ mon. wach. \& besch} \Rightarrow \text{konv} \Rightarrow \int_1^{\infty} f < \infty$$

4.13 Bsp ($\sum \frac{1}{n^s}$ zum Zweiten; vgl. [1] 4.P) Für $s > 0$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konv} \stackrel{4.12}{=} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \text{ konv} \stackrel{4.3(iii)}{=} s > 1$$