Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer

Fakultät für Mathematik
Universität Wien

Wintersemester 2012/13
2 Wstd / 4 ECTS

[3] DIFFERENTIATION

Bevor wir tatsächlich mit dem Thema Differentialrechnung starten sehen wir dieses in Beziehung ersten Teil der VO und geben auch einen Ausblick auf die weiteren Themen dieses 2. Teils des VO-Zyklus Analysis.

§0 RÜCKBLICK & AUSBLICK

0.1 WH aus [0] §0 (Was will und was soll die Analysis)

Der inhaltliche Kern der Analysis ist [[0] 0.2] die Differential- & Integralrechnung.

Genauer: das Verstehen & Beschreiben des Änderungsverhaltens von Funktionen

Noch genauer ist das Hauptthema der Analysis:

> Welche Begriffe eignen sich am Besten dazu die Änderung einer Fkt im Kleinen (d.h. lokal um einen Pkt im Defbereich) zu verstehen und was kann man daraus über die Fkt im Großen (d.h. ihren Gesamtverlauf) sagen!

0.2 Rückblick auf [1] & [2]

Zentraler Begriff: | Stetigkeit

- beschreibt ja genau das lokale Änderungsverhalten von Fkt
- aber noch nicht genau genug?
- baut auf auf dem

Zentraler Begriff: | Grenzwertbegriff

- liefert via (abs konv) Reihen auch das Hauptwerkzeug zur Konstruktion interessanter Fkt (über Polynome & rationale Fkt hinausgehend)

exp, log, sin, cos, tan, arcsin, arccos, arctan
x^α, sinh, cosh, tanh

Mit diesen Inhalten und auch den Techniken der EidA haben wir einen Grundstein auf dem wir hoch hinaus aufbauen können.

0.3 Ausblick auf [3]:

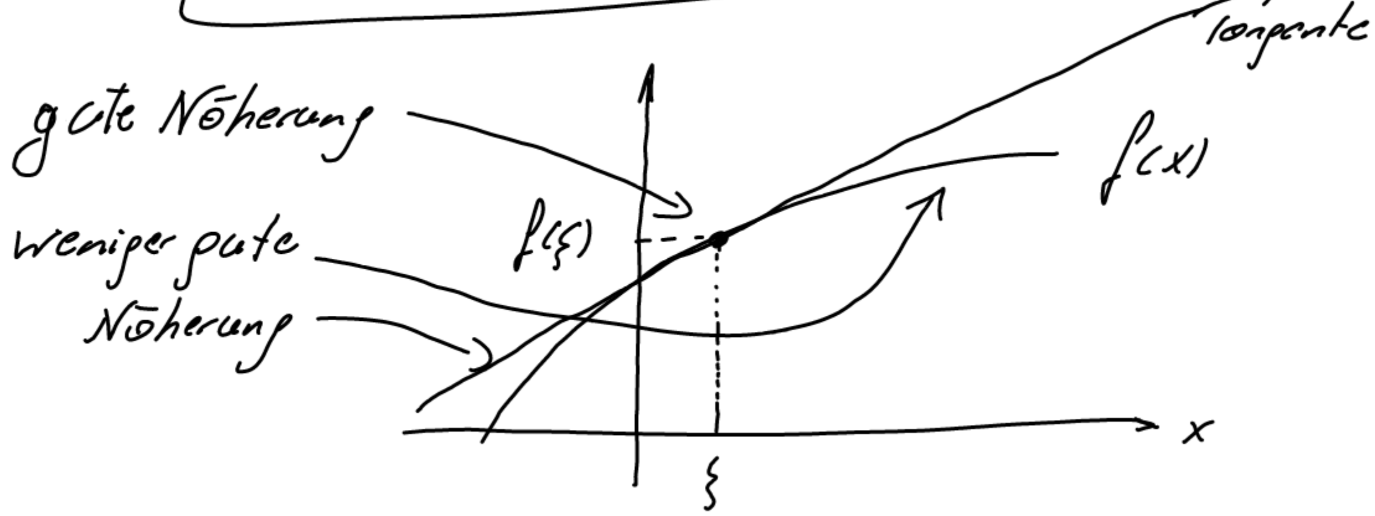
Hier nimmt unser Studium des Änderungsverhaltens von Fkt die alles entscheidende Wendung!

Idee: Vergleiche die Änderung einer Fkt f nahe ξ (Pkt im Defbereich) mit der einfachsten nicht-konstanten Fkt $x \mapsto x$

geht weit über Stetigkeit hinaus

Formaler: f heißt differenzierbar in ξ, falls f nahe ξ gut durch eine Gerade (ihre Tangente) approximiert werden kann.

[xi] → ξ



Wir werden sehen, dass diese Idee enorm weit trägt!

0.4 Ausblick auf [3] – Details

(i) Zunächst werden wir in §1 die Begriffe Differenzierbarkeit & Ableitung von Fkt gründlich untersuchen.

Natürlich spielen hier die „alten Bekannten" Differenzenquotient & Differentialquotient wichtige Rollen. Neu hinzu kommt ein anderer Gesichtspunkt, der viel allgemeiner gefaßt werden kann und daher auch viel weiter trägt [vgl. vor allem 3. Teil der VO]

Die Ableitung als lineare Bestapproximation an die Funktion

Wir klären das Verhältnis der Diffbarkeit zur Stetigkeit und leiten die „schulbekannten[1]" Ableitungsregeln her um damit die wichtigsten Funktionen zu differenzieren.

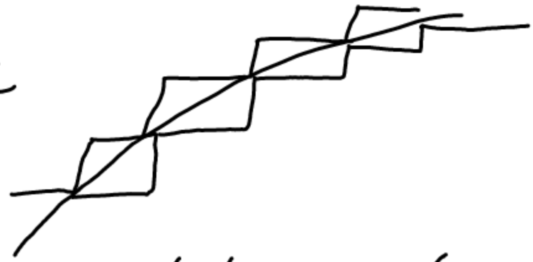
(ii) Desweiteren lernen wir in §2 die wichtigsten Sätze über differenzierbare Funktionen kennen: den Mittelwertsatz der Differentialrechnung - eines der Hauptresultate der VO, Kriterien für (lokale) Extremstellen und die De L'Hospital-Regeln – die letzteren sicher auch „schulbekannt".

---

[1] „schulbekannt" in Analogie zu amtsbekannt.

0.5 Weiterer Ausblick auf die Vorlesung

(i) In Kapitel [4] befassen wir uns gründlich mit der Integralrechnung. Wir lernen das Riemann-Integral kennen. Hier wird der Grenzwertbegriff verwendet um eine Eigenschaft einer Fkt im Großen zu definieren: Eine Fkt heißt integrierbar, wenn sie sich gut zwischen Treppenfkt „einzwicken" läßt.



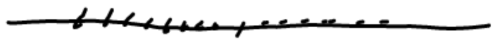
Die Brücke zwischen Differential- und Integralrechnung schlägt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Er ermöglicht nicht nur das konkrete Berechnen von Integralen und somit Flächen sondern verbindet lokale mit globalen Eigenschaften von Fkt. – vgl 0.1

Wir lernen außerdem den Satz von Taylor kennen, der es erlaubt („schöne") Fkt nur aus der Kenntnis ihrer höheren Ableitungen in einem einzigen Pkt zu rekonstruieren?! – vgl 0.1

(ii) Dieser Satz wird uns dazu führen Folgen (und auch Reihen) von Funktionen zu studieren.

Das sind Folgen, deren einzelnen Glieder nicht reelle Zahlen sind, sondern Funktionen $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Diese studieren wir in Kap. [5]



Folge in $\mathbb{R}$

Folge in $\mathbb{C}$

Folge von Funktionen

Wir lernen Konvergenzbegriffe für solche Folgen kennen und betrachten spezielle Funktionenreihen: Potenzreihen & Fourier-Reihen.

(Verallgemeinerung von Polynomen)

(Zerlegung von periodischen Funktionen („Signalen") in Grund- und Oberschwingungen; sehr wichtig in Anwendungen)

§1 Differenzierbarkeit & Ableitung

1.1 Motivation (Änderungsverhalten von Funktionen)

(i) Wir haben im Verlauf der EidA öfters gesehen, dass es bei der Untersuchung von Funktionen weniger darauf ankommt, ihre Werte an vorgegebenen Stellen zu kennen als vielmehr die

Veränderung der Funktionswerte bei Veränderungen des Arguments.

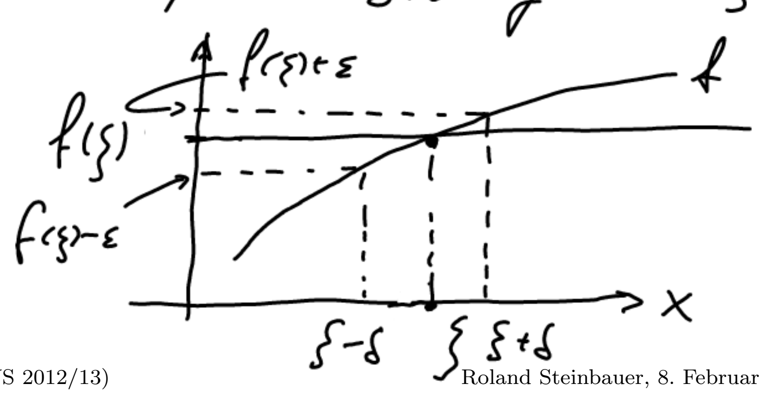
Zwei dieser „Änderungsmodi" haben wir schon kennen gelernt: Monotonie [[2] 2.17] & Stetigkeit [[2] §1]

(ii) Erinnern wir uns an die Definition der Stetigkeit [[2] 1.6] für eine Fkt $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ im Punkt $\xi \in D$:

[Xi]

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \text{ mit } |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

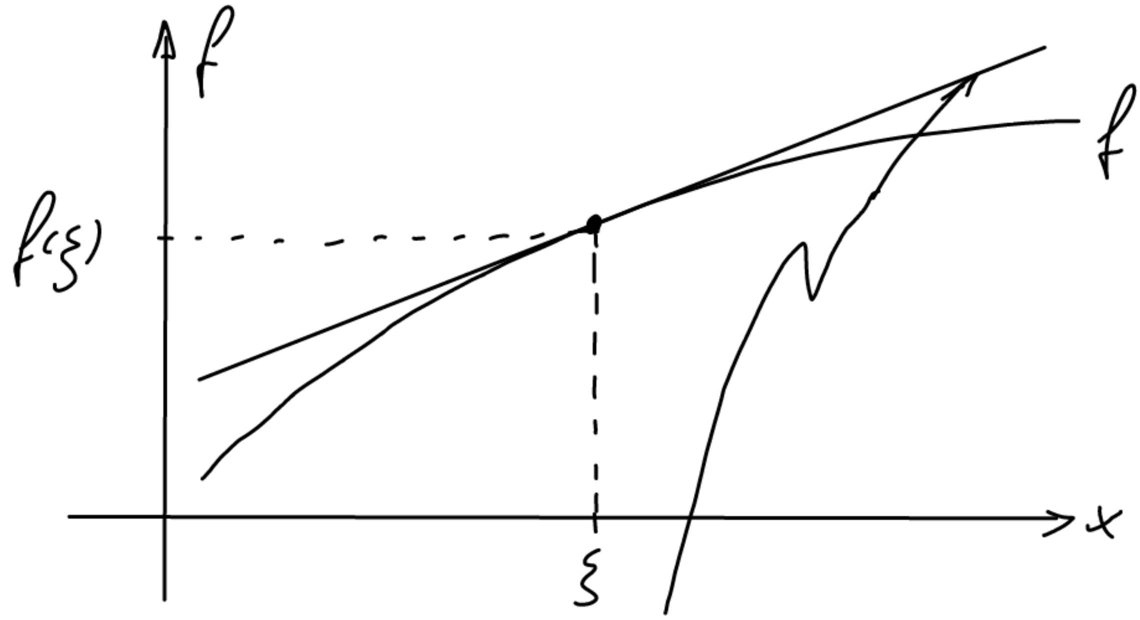
Stark vereinfacht bedeutet das, dass sich f nahe ξ wie die konstante Funktion $x \mapsto f(\xi)$ verhält.



(iii) Dem Begriff der Differenzierbarkeit einer Fkt $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ können wir uns [unter vielen alternativen Zugängen! siehe auch später] auf ähnliche Weise nähern, die etwa auch ein beliebter Zugang der Schulmathematik ist:

> Wir werden f bei $\xi \in D$ <u>differenzierbar</u> nennen, wenn f „in der Nähe" von ξ „sehr gut" durch eine Gerade approximiert werden kann. $(*)$

Diese Gerade ist dann natürlich die Tangente [aus der Schulmathematik].



approximierende Gerade, Tangente bei $(\xi, f(\xi))$

Um die Idee $(*)$ zu präzisieren und in eine offizielle Def gießen zu können, müssen wir sie zunächst etwas formaler ausdrücken:

Die approximierende Gerade hat – sowie jede Gerade – die Form

$$g(x) = \alpha x + \beta. \qquad (**)$$

„y-Abschnitt"

Anstieg

Außerdem passiert g den Punkt $(\xi, f(\xi))$, d.h.

$$f(\xi) = g(\xi) = \alpha \xi + \beta. \qquad (***)$$

Daher ergibt sich in Punkten $x = \xi + h$

$$g(x) = g(\xi + h) \overset{(**)}{=} \alpha(\xi + h) + \beta = \alpha\xi + \beta + \alpha h \overset{(***)}{=} \boxed{f(\xi) + \alpha h}$$

Im Sinne unserer Approximations-Idee (*) bedeutet das, dass für x „nahe bei" ξ (d.h. für „kleine" h)

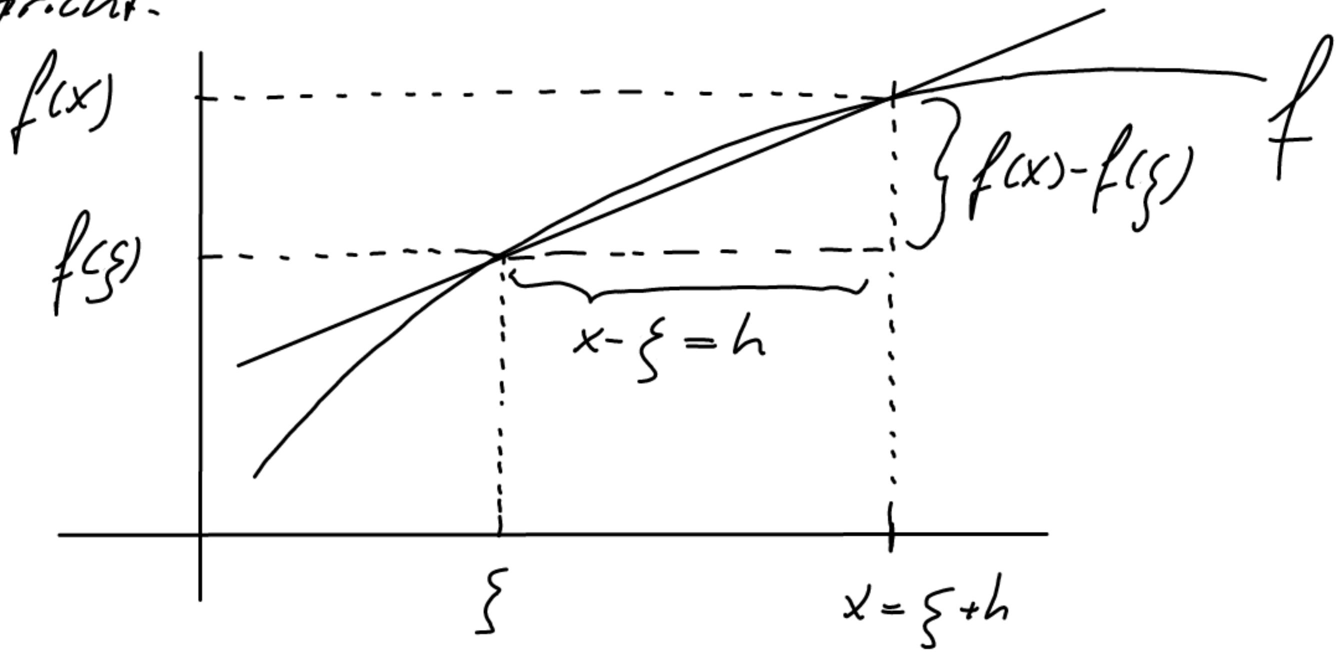
$$\boxed{f(x) = f(\xi + h) \approx g(\xi + h) = f(\xi) + \alpha h} \qquad (\Delta)$$

gilt.

Noch bevor wir (Δ) präziser fassen, können wir es verwenden, um den noch unbekannten Anstieg α der approx. Geraden g zu bestimmen, nämlich

$$\alpha \approx \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Diesen Ausdruck werden wir als Differenzenquotient bezeichnen. Seine graphische Bedeutung ist, dass er der Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(\xi, f(\xi))$ und $(\xi+h, f(\xi+h)) = (x, f(x))$ entspricht.



(iv) Der weitere Weg der Präzisierung von (*) ist nun vorgezeichnet. Um der Idee (*) gerecht zu werden müssen wir uns mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(\xi+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{x \to \xi \\ x \neq \xi}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

sonst sinnlos!

befassen, bzw. untersuchen, ob er überhaupt existiert.

— Jetzt offiziell:

1.2 DEF (Differenzenquotient)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f: I \to \mathbb{R}$ und $\xi \in I$ fix. Für $I \ni x \neq \xi$ heißt der Ausdruck $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ Differenzenquotient von f bei ξ.

1.3 BEM (2 Variablen) Formal hat der Differenzenquotient den Nachteil, dass er von 2 Variablen, ← (die 2 Pkte, die die Sekante festlegen) nämlich ξ und x abhängt. Wie in 1.1(iv) angedeutet wollen wir die Abhängigkeit von x durch Übergang zum Limes $x \to \xi$ loswerden, wobei der Differenzenquotient in die Tangentensteigung übergehen sollte.

Um diesen Limes (von Fkt.!) sauber durchführen zu können, wiederholen wir

1.4 DEF (Limes von Fkt auf Intervallen; Spezialfall von [2] 1.21) ← (damit automatisch BP, [1] 3.28(i))

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ und sei $\xi \in I$.
Wir schreiben

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = c,$$

← ($c \in \mathbb{R}$, aber auch $\pm\infty$)

falls für jede Folge $(x_n)_n$ in I mit $x_n \to \xi$ gilt, dass $f(x_n) \to c$.

1.5 BEM (Technisches Detail) Wir haben in 1.1(iv) gesehen, dass im Differenzenquotienten $x = \xi$ sinnlos ist und diesen Fall daher auch in Def 1.2 ausgeschlossen. Andererseits erlaubt Def 1.4 explizit auch die Folge $x_n = \xi \ \forall n$ [konvergiert ja trivialerweise, vgl. [1] 2.11(i)].

Daher müssen wir im Folgenden bei $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ immer die konstante Folge $x_n=\xi$ explizit verbieten und schreiben $\lim\limits_{x\neq\xi,\, x\to\xi}$ oder $\lim\limits_{\xi\neq x\to\xi}$

Warnung: Manche Quellen [z.B. Heuser] verbieten in der Def für Konvergenz von Funktionen $x_n=\xi$. Dann muß bei der Differenzierbarkeit $x_n=\xi$ nicht ausgeschlossen werden. Dafür sind einige Details im Zusammenhang mit Limiten von Fkt anders zu handhaben.! Jetzt aber los!

Schlüssel-Def

1.6 DEF (Differenzierbarkeit & Ableitung)

Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I\to\mathbb{R}$ eine reelle Fkt.

(i) Sei $\xi\in I$. Die Fkt f heißt differenzierbar an der Stelle ξ [diffbar in ξ], falls

$$\lim_{\substack{x\to\xi\\ x\neq\xi}} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \quad \text{oder, was dasselbe ist,} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$$

existiert und endlich ist. [d.h. kein uneigentl. Grenzwert erlaubt!] Diesen Grenzwert nennen wir die Ableitung von f in ξ und schreiben

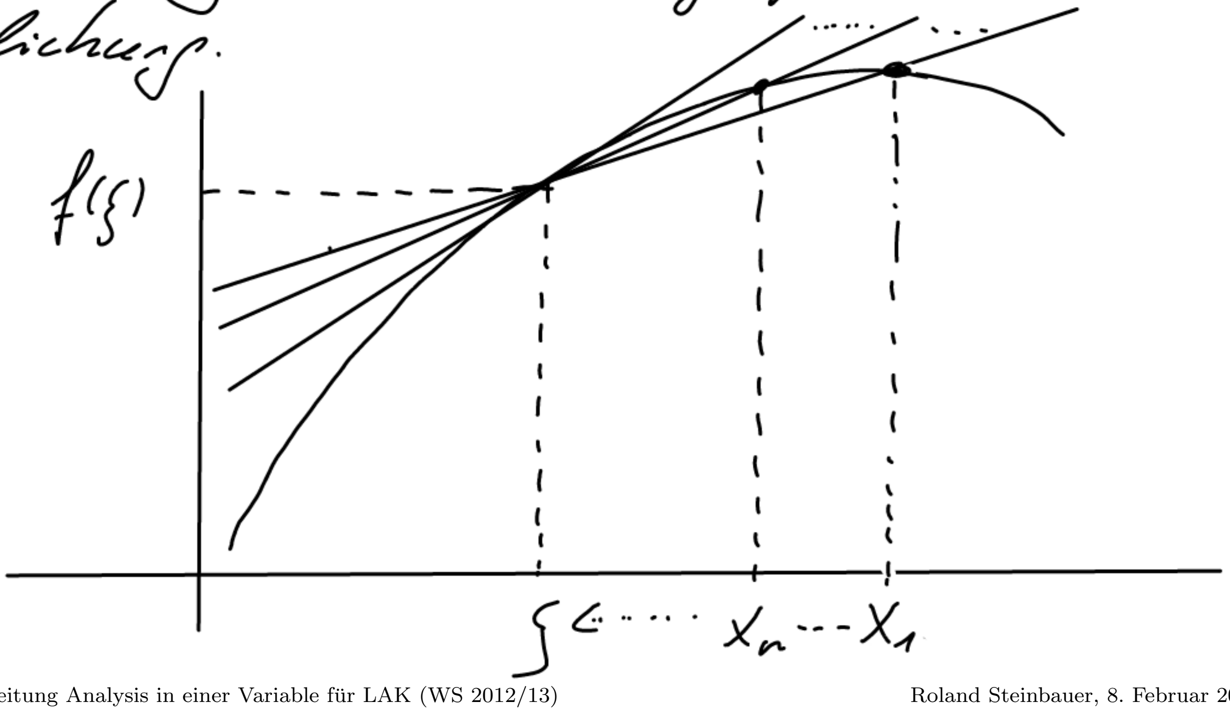
$$f'(\xi).$$

(ii) Ist f differenzierbar in allen Punkten $\xi \in I$, dann heißt f differenzierbar auf I oder einfach differenzierbar.

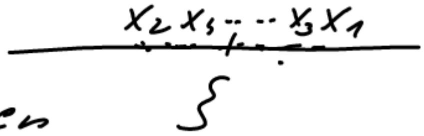
1.7 BEM (Zur Bedeutung von Def 1.6 & einseitige Ableitung)

(i) Falls der Limes in 1.6 (i) existiert und endlich ist, gilt tatsächlich wie in 1.1 (iii) antizipiert, dass die Ableitung (an der Stelle ξ) gleich dem Limes des Differenzenquotienten (an der Stelle ξ) ist.

Geometrisch ergibt sich die Ableitung also als der Grenzwert der Sekantensteigungen und kann somit als die Steigung der Tangente im Punkt ξ an den Graphen von f interpretiert werden. Zu dieser Lösung des sog. Tangentenproblems unten [1.10] mehr. Jetzt noch eine graphische Veranschaulichung.



(ii) Bisher haben wir suggestiv immer $x > \xi$ gezeichnet. Das dient aber nur der Veranschaulichung. Klarerweise sind in der Def 1.6(i) resp 1.4 auch Folgen erlaubt, die von links/unten gegen ξ konvergieren – ebenso wie Folgen die „hin- und herspringen".



[Nach Def 1.4 & 1.6 sind alle Folgen $(x_n)_n$ in I erlaubt mit $x_n \neq \xi$, $\forall n$ und $x_n \to \xi$]

(iii) Ist I ein (wenigstens halb-) abgeschlossenes Intervall und ξ ein Randpkt von I, dann kommen nur Folgen in Frage die von oben bzw unten gegen I konvergieren. Man spricht dann von <u>einseitigen</u> <u>Ableitungen</u>. Natürlich können solche auch für innere Pkte eines beliebigen Intervalls betrachtet werden.

1.8 BSP (Höchste Zeit: Diffbare & nichtdiffbare Fkt.)

(i) <u>Konstante Fkt</u> sind (überall) diffbar mit Abl = 0

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ $\forall x$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

(ii) <u>Potenzfkt</u> sind diffbar. Sei $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \ni n \geq 1$.

Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx^n$

Es gilt

$$f'(x) = \lim_{0\neq h\to 0} \frac{c(x+h)^n - cx^n}{h} = c \lim_{0\neq h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\overset{\text{(BLS)}}{=} c \lim_{0\neq h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h}$$

$$= c \lim \frac{x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h}$$

$$= c \lim \frac{h}{h} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} \right)$$

$$= c \lim \left(\underbrace{\binom{n}{1}}_{=n} x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h^{k-1}}_{\to 0} x^{n-k} \right)$$

$$= \overline{c n x^{n-1}},$$

Insbesondere gilt also

- (Geraden) $f(x) = cx$, $f'(x) = cx^0 = c$
- $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

(iii) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ ist überall differenzierbar (dh auf dem ganzen Defber. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) und $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Tatsächlich gilt

$$\lim_{0\neq h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{0\neq h\to 0} \frac{1}{h} \frac{x-(x+h)}{x(x+h)}$$

$$= \lim_{0\neq h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

(iv) Die Exponentialfkt ist auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar und gleich ihrer Ableitung, denn $\boxed{\exp' = \exp}$

$$\lim_{0\neq h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} \overset{[1]\, 4.38}{=} \exp(x) \lim_{0\neq h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h}$$

$$\overset{[2]\, 3.8(\mathrm{viii})}{=} \exp(x).$$

(v) Die Winkelfkt sin & cos sind diffbar auf $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x). \end{aligned}}$$

Tatsächlich gilt für den Sinus

$$\lim_{0\neq h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \underset{[2]\, 3.17(\mathrm{iv})}{=} \lim \frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim \underbrace{\cos\left(x+\tfrac{h}{2}\right)}_{\substack{\cos \text{ stetig } [[2]\, 3.17(\mathrm{i})] \\ \to \cos(x)\ (h\to 0)}} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\to 1\ [[2]\, 3.17(\mathrm{vi})]}$$

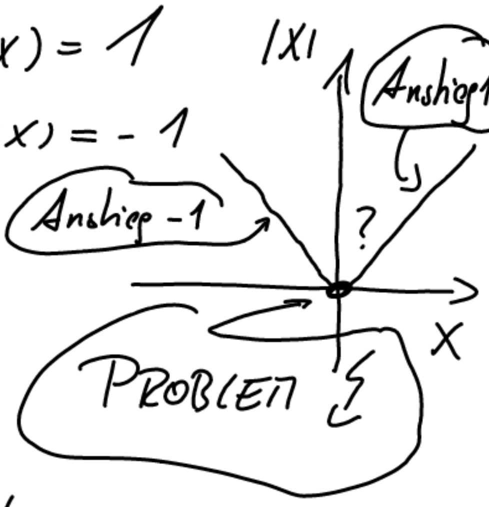
$$\overset{[1]\, 2.23}{=} \lim \cos\left(x+\tfrac{h}{2}\right) \lim \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \underline{\cos(x)}$$

Der Cosinus-Fall lässt sich analog erledigen $\rightsquigarrow$ [UE].

(vi) Der <u>Absolutbetrag</u> $\mathrm{abs}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist diff'bar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ aber <u>nicht diff'bar in $x=0$</u>

Tatsächlich gilt für

$$x>0: \quad \mathrm{abs} = \mathrm{id} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \mathrm{abs}'(x) = 1$$
$$x<0: \quad \mathrm{abs} = -\mathrm{id} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \mathrm{abs}'(x) = -1$$



Aber $\mathrm{abs}'(0)$ existiert nicht, denn sei $h_n = (-1)^n/n$, dann gilt $h_n \to 0$ aber die Folge der Differenzenquotienten konvergiert nicht:

$$\frac{|0+h_n| - |0|}{h_n} = \frac{1/n}{(-1)^n\, 1/n} = (-1)^n \quad \underline{\text{div}} \left[\boxed{1}\ 2.11(iii)\right]$$

[Die Folge (h_n) ist natürlich so gewählt, dass sie abwechselnd Differenzenquotienten ± 1 produziert ...]

<u>1.9 BEM</u> ((Nicht)-diff'bare Fkt)

(i) Bemerke, dass abs in $x=0$ zwar <u>stetig</u> ist $\left[\boxed{2}\ 1.2(iv)\right]$ aber eben <u>nicht</u> <u>diff'bar</u> !

(ii) In gewisser Weise ist der <u>Knick</u> von abs bei $x=0$ ein <u>Prototyp</u> einer nicht-Differenzierbarkeit – etwa wie Sprünge Prototypen für Unstetigkeiten sind [vgl. $\boxed{2}$ 1.8(v) oder auch $\boxed{2}$ 1.15 !] Aber auch hier ist die ganze Wahrheit komplizierter. Es gibt etwa Fkt, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig aber nirgends diffbar sind, z.B. die Weierstraß-Fkt $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin(2^k x)}{3^k}$. [Topologisch gesehen gibt es sogar viele solche Fkt – sie liegen dicht in den stetigen.]

(iii) Das „Problem" von oben bei $x=0$ lässt sich mittels einseitiger Ableitungen [1.7(iii)] genauer analysieren. Offensichtlich gilt

siehe $\boxed{2}$ 1.24(ii)

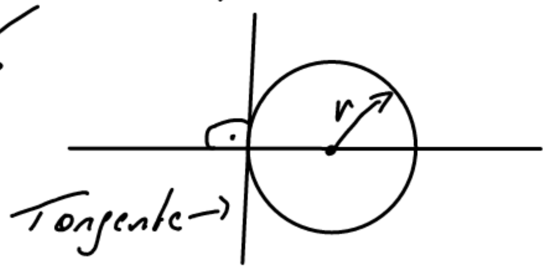
$$\lim_{h\searrow 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = 1, \quad \lim_{h\nearrow 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = -1,$$

sodass die einseitigen Ableitungen bei $x=0$ existieren und ± 1 ergeben.

1.10 BEM (Historische Bemerkung 1: Tangentenproblem)

Die grundlegende Problemstellung der Differentialrechnung war seit der Antike unter dem Namen Tangentenproblem bekannt: Finde die Tangente in einem Punkt an eine beliebige Kurve.

Dabei ist zunächst das Problem, wie überhaupt die Tangente an eine beliebige Kurve zu definieren ist, d.h. wie man von einfachen Spezialfällen wie zB den Kreis zu einer guten Verallgemeinerung gelangen soll/kann. Ein zunächst

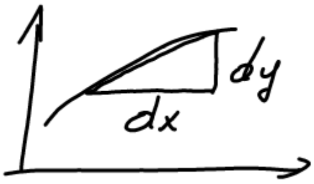


naheliegender Ansatz ist es, die Tangentensteigung durch die Sekantensteigungen anzunähern – also unsere Idee (*) aus 1.1(iii). Was wir in Def 1.6(i) locker mit dem Grenzwertbegriff erledigt haben, stellte die MathematikerInnen bis vor ~300 Jahren vor gewaltige technische Probleme.

Nach früheren Ansätzen von P. Fermat [~1600–1665] und R. Descartes [1596–1650] gelang es Ende des 17. Jh. unabhängig voneinander Gottfried Wilhelm Leibniz [1646–1716] und Isaac Newton [1643–1727] funktionierende Kalküle zu entwickeln.

Für Leibniz war dabei die Tangentensteigung die Steigung der Hypothenuse in einem „unendlich kleinen" Dreieck, das sich im Grenzfall aus den Sekantendreiecken ergibt. Tatsächlich rechneten die MathematikerInnen bis weit ins 19. Jahrhundert mit solchen, schwer fassbaren „unendlich kleinen Größen," ehe der moderne Grenzwertbegriff geprägt wurde. Aus dieser Anfangszeit der Differentialrechnung hat bis heute eine Schreibweise überlebt: Bezeichnen wir eine Funktion mit y (wie früher oft üblich), etwa $y = x^3 + 2x^2 + 7$, dann schreibt man für die Ableitung statt y' auch manchmal

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x.$$



„infinitesimales Dreieck“

Leibniz hat sich dabei $\frac{dy}{dx}$ wohl wirklich als den Quotienten aus Gegenkathete (dy) und Ankathete (dx) vorgestellt, wobei dx und dy „unendlich klein“ sind.

Der moderne Grenzwertbegriff erspart es uns mit diesen, eine gewisse „richtige“ Anschauung voraussetzenden „unendlich kleinen Größen“ hantieren zu müssen. Es gibt aber auch einen um die Mitte des 20. Jh. von A. Robinson [1918-74] u.a. entwickelten Zugang zur Analysis, der einen rigorosen Umgang mit „unendlich kleinen“ (und „unendlich großen“) Größen ermöglicht. Dieses math. Teilgebiet heißt <u>Nichtstandard Analysis</u>.

<u>1.11 BEM</u> (Historische Bem 2: Newtonsche Mechanik)

Isaac Newton ging einen etwas anderen Weg als Leibniz. In seinem Hauptwerk, der „Principia Mathematica“ - einem der einflussreichsten Bücher überhaupt - hat er gezeigt, dass wesentliche Phänomene in der Natur erfolgreich durch math. Modelle beschrieben werden können. Dazu entwickelte er eine Differential- und Integralrechnung, wobei er vom Problem der

Momentangeschwindigkeit ausging:
Ein Massenpunkt P bewegt sich auf der Zahlengeraden. Seinen Ort zum Zeitpunkt t beschreiben wir mit der Funktion $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto s(t)$. Unsere Anschauung drängt uns dazu, zu glauben, dass P zu jedem Zeitpunkt eine Momentangeschwindigkeit hat. Tatsächlich bestimmbar sind aber nur Durchschnittsgeschwindigkeiten zwischen den Zeitpunkten t_0 und t, also

auch mittlere Geschw.

$$\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}.$$

In völliger Analogie zum Tangentenanstieg können wir die Momentangeschwindigkeit $v(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 als den Grenzwert dieser Durchschnittsgeschw. definieren — falls dieser existiert, d.h. dass die Durchschnittsgeschw. genügend „stabil" sind, falls t „in der Nähe" von t_0 variiert. Also

$$v(t_0) := \lim_{t_0 \neq t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0} \quad \left[\text{falls existent}\right]$$

Zum Bsp. gilt für den freien Fall $s(t) = \frac{1}{2} g t^2$

Erdbeschleunigung $\sim 9.81\, m s^{-2}$

und daher

$$\underline{\underline{v(t)}} = \left(\frac{1}{2} g t^2\right)' \underset{\text{1-8(iii)}}{=} \underline{\underline{g t}}$$

Wie auch schon aus der Notation ersichtlich, ist die Momentangeschw. v selbst eine Funktion der Zeit t, d.h. $t \mapsto v(t)$. Die <u>mittlere Beschleunigung</u> von P zwischen t_0 und t ist definiert als der Differenzenquotient

$$\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

und ganz ähnlich zur Momentangeschw. definieren wir die <u>Momentanbeschleunigung</u> zum Zeitpunkt t_0 als

$$b(t_0) := \lim_{t_0 \neq t \to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0} \quad [\text{falls ex.}]$$

Für den freien Fall ergibt sich also

$$\underline{\underline{b(t)}} = v'(t) = (gt)' = \underline{\underline{g}},$$

was auch den Namen der Konstanten g erklärt.

Erst diese präzisen Definitionen von Momentangeschw. und -beschleunigung ermöglichen einen <u>analytischen Zugriff</u> auf Newtons Kraftgesetz (2. Newtonsches Axiom)

$$\boxed{\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}}$$

nämlich $F(t) = m \cdot v'(t) = m \cdot s''(t)$

Klassische Mechanik in der Physik

1.12 BEM (Diffbarkeit vs Stetigkeit)

Bsp 1.8(vii) zeigt, dass die Stetigkeit einer Fkt f im Pkt ξ nicht die Differenzierbarkeit von f in ξ impliziert. Die Umkehrung ist aber richtig, wie das nächste Thm zeigt. Insbesondere gilt also für $f: I \to \mathbb{R}$, $\xi \in I$

$$\boxed{f \text{ diffbar in } \xi \quad \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} \quad f \text{ stetig in } \xi}$$

1.13 Thm (diffbar $\Rightarrow$ stetig)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls f differenzierbar in $\xi \in I$ ist, dann ist f in ξ auch stetig.

Beweis. Sei $I \ni x \neq \xi$, dann gilt lt. Voraussetzung

$$f(x) - f(\xi) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\,(x - \xi) \xrightarrow{(x \to \xi)} f'(\xi) \cdot 0 = 0,$$

also $f(x) \to f(\xi)$ und mit [2] Prop 1.26 folgt dass f stetig in ξ ist.

$\square$

1.14 MOTIVATION (Weiteres Vorgehen)

Ein wichtiger Aspekt beim Studium neuer Begriffe – hier Differenzierbarkeit – ist es immer, möglichst viele (Klassen von) Beispielen und Nicht-Bsp zu finden. mühsam

Um dabei nicht immer auf die Def zurückgreifen zu müssen, werden wir hier wie in [2] §1 im Falle der Stetigkeit ein „Baukastensystem" etablieren [vgl. [2] 1.16] und uns darum kümmern, ob die Grundoperationen für Fkt ([1] 1.3) die Differenzierbarkeit erhalten. Ganz mühelos werden wir dabei die aus der Schulmathematik bekannten Differentiationsregeln (wieder-) entdecken.

1.15 PROP (Grundops & Diffbarkeit – Differentiationsregeln)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\xi \in I$ und $f, g: I \to \mathbb{R}$ diffbar in ξ. Dann gilt

(i) (Linearkombinationen) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda f + \mu g$ diffbar in ξ und es gilt

$$\boxed{(\lambda f + \mu g)'(\xi) = \lambda f'(\xi) + \mu g'(\xi).}$$

(ii) (Leibniz- oder Produktregel) $f \cdot g$ ist diffbar in ξ und es gilt

$$\boxed{(f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) g(\xi) + f(\xi) g'(\xi)}$$

(iii) (Quotientenregel) Falls $g(\xi) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ diffbar in ξ und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g(\xi)^2}$$

Beweis: (i) folgt sofort aus den Grenzwertsätzen [1] 2.25 [UE]

(ii) Sei $0 \neq h$ mit $\xi + h \in I$. Dann gilt

$$\frac{f(\xi+h)g(\xi+h) - f(\xi)g(\xi)}{h} \overset{\text{Trick}}{=} \frac{1}{h}\Big(f(\xi+h)\big(g(\xi+h) - g(\xi)\big) + \big(f(\xi+h) - f(\xi)\big)g(\xi)\Big)$$

$$= f(\xi+h)\,\frac{g(\xi+h) - g(\xi)}{h} + \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h}\,g(\xi)$$

$$\xrightarrow[\text{[1] 2.25}]{0 \neq h \to 0} f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(\xi)$$

f stetig in ξ [1.13]

(iii) Sei zunächst $f(x) \equiv 1$ auf I. Für $0 \neq h$ mit $\xi + h \in I$ gilt

$$\frac{\frac{1}{g(\xi+h)} - \frac{1}{g(\xi)}}{h} = \frac{g(\xi) - g(\xi+h)}{h\,g(\xi)\,g(\xi+h)} \xrightarrow{\text{[1] 2.23 \& 2.26, 1.13 !}} -\frac{g'(\xi)}{g(\xi)^2}$$

also $$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(\xi) = -g'(\xi)/g^2(\xi)} \quad (*)$$

auch unabhängig wichtig

Der allgemeine Fall folgt nun aus (ii)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(\xi) \overset{(ii)}{=} f'(\xi)\frac{1}{g}(\xi) + f(\xi)\left(\frac{1}{g}\right)'(\xi)$$

$$\overset{(*)}{=} f'(\xi)\frac{1}{g}(\xi) - f(\xi)\frac{g'(\xi)}{g^2(\xi)}$$

$$= \frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)}.$$

$\Box$

1.16 BSP (Weitere diffbare Fkt)

Ganz im Sinne von 1.14 wenden wir nun 1.15 an und holen reiche Ernte!

(i) (Einfache rationale Fkt)

kein Intervall aber Vereinigung zweier Intervalle

Sei $\mathbb{N} \ni n \geq 1$ und $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x^n$, dann gilt wegen 1.15(iii) $[1/x^n \neq 0 \ \forall x \neq 0]$

oder auch (*) im Beweis von 1.15(iii) – was ja ein einfacher Spezialfall ist

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' \underset{1.8(iii)}{=} \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}},$$

d.h. $\boxed{(x^{-n})' = -nx^{-n-1}.}$

(ii) $\tan: \mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + \pi\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ ist diffbar und es gilt

$$\left(\tan x\right)' \underset{\boxed{2}\ 3.25(i)}{=} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \underset{\substack{1.15(iii)\\ 1.8(v)}}{=} \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

(iii) Polynome und rationale Fkt sind überall diffbar. [Details UE]

1.17 MOTIVATION (Differentiation als lineare Approximation)

Bevor wir unser Baukostensystem aus 1.15 [vgl. 1.14] erweitern (können) werfen wir noch einen weiteren Blick auf den Begriff der Differentiation – diesen Gesichtspunkt der

Ableitung als lineare Approximation an die ursprüngliche Funktion

haben wir schon in 1.1(iii) angedeutet. Aber Achtung: Obwohl er in der Schulmathematik eine untergeordnete Rolle spielt, ist er der in der Mathematik insgesamt bestimmende Aspekt des Begriffs der Differenzierbarkeit!

Er ermöglicht – im Gegensatz zum Zugang mittels Differenzenquotient – weitreichende Verallgemei- siehe 3.Teil der VO nerungen und is sozusagen <u>der</u> Kern der Sache.

Wir beginnen mit einer einfachen Umformulierung von Bekanntem.

<u>1.18 BEM</u> (Differentialquotient vs. lin. Approx.)

(i) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $\xi \in I$ mit $f'(\xi) =: a \in \mathbb{R}$.
Dann gilt nach Def 1.6(i)

$$0 = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - a = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - ah}{h}. \quad (*)$$

Das kann man nun aber auch so interpretieren:
Die lineare Funktion $h \mapsto a \cdot h$ ist (im Sinne von $(*)$) eine Approximation der Fkt $h \mapsto f(\xi+h) - f(\xi)$; mehr dazu in 1.20 unten.

(ii) Umgekehrt ang $\exists a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $(*)$ d.h.

$$\lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - ah}{h} = 0,$$

dann gilt $\lim 1/h \left(f(\xi+h) - f(\xi)\right) = a$ und somit ist f in ξ diffbar mit $f'(\xi) = a$.
Insgesamt haben wir also gezeigt

(iii) $$\boxed{f \text{ diffbar in } \xi \iff \exists a \in \mathbb{R}: \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi+h) - f(\xi) - ah}{h} = 0}$$

und in diesem Fall ist $f'(\xi)=a$.

Eine auch praktisch besser verwendbare Weiterführung dieser Idee halten wir als Thm fest.

1.19 THM (Differenzierbarkeit mittels lin. Approx.)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine reelle Fkt auf einem Intervall und sei $\xi \in I$. Dann gilt

$$f \text{ diffbar in } \xi \iff \begin{array}{l} \exists a \in \mathbb{R} \ \exists \text{ Fkt } r: I \to \mathbb{R} \text{ sodass} \\ f(\xi+h) - f(\xi) = a \cdot h + r(h) \\ \text{und } \lim\limits_{0 \neq h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0 \end{array}$$

In diesem Fall gilt $f'(\xi) = a$.

1.20 BEM (Zur Bedeutung von Thm 1.19)

(i) Um die Bedeutung von 1.19 besser zu verstehen definieren wir das Inkrement der Fkt f bei ξ als

$$\varphi(h) = f(\xi+h) - f(\xi).$$

Zunahme von f zwischen ξ u. $\xi+h$

Dann besagt 1.19 im Fall der Diffbarkeit, dass

$$\varphi(h) = f'(\xi) \cdot h + r(h),$$

d.h. dass das Inkrement bis auf einen „Fehler" $r(h)$ proportional zur Zunahme der unabhängigen Variablen hist – der Proportionalitätsfaktor ist genau $f'(\xi)$

$$\varphi(h) = f(\xi+h) - f(\xi) \approx f'(\xi) \cdot h$$

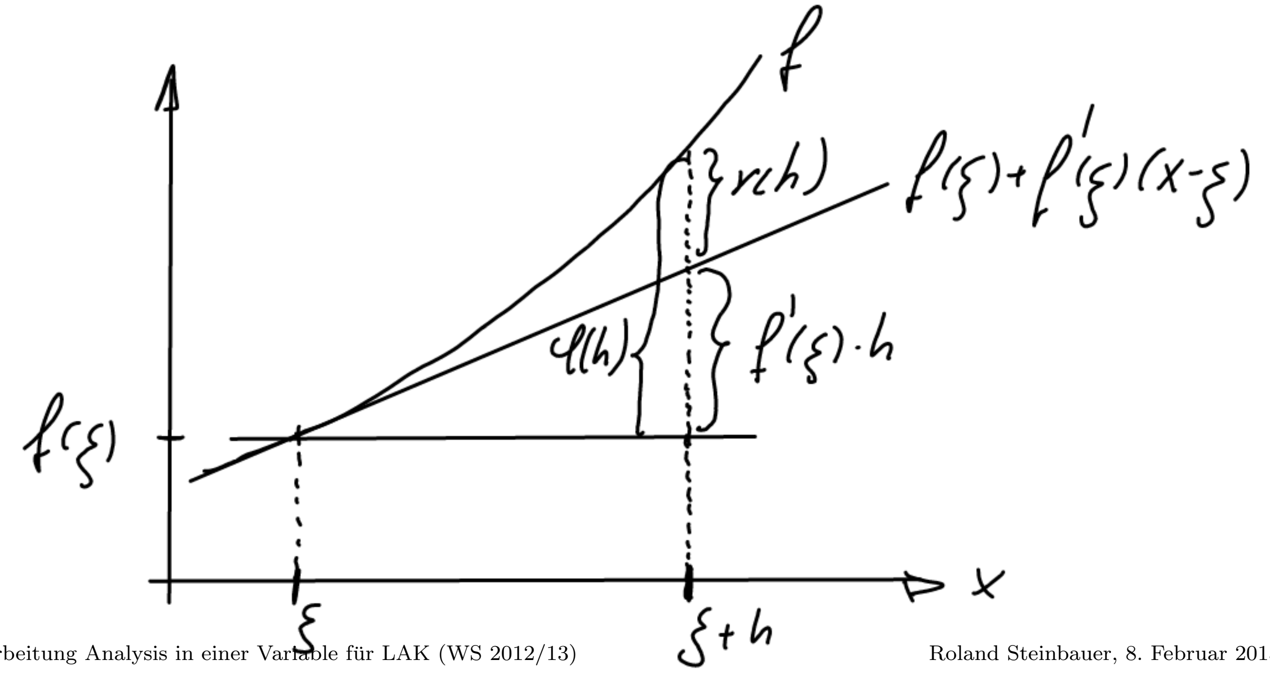
Oder noch anders: Die Inkrementfunktion $h \mapsto \varphi(h)$ wird bis auf den „Fehler" $r(h)$ durch die lineare Fkt $h \mapsto f'(\xi) \cdot h$ approximiert.

(ii) Geometrisch bedeutet das nichts anderes als [vgl. 1.1 (iii)] dass die Tangente an f im Pkt ξ definiert als

$$g(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)$$

im präzisen Sinne von 1.18 für x nahe ξ (d.h. für kleine h) eine gute Approximation ist [weil 1.18 sagt ja

$$f(\xi+h) = f(\xi) + f'(\xi)h + r(h).$$]



(iii) Besondere Beachtung verdient auch das Verhalten des „Fehlers" r [r für Rest]. Dieser erfüllt nicht nur $r(h) \to 0$ $(h \to 0)$ sondern sogar

$$\frac{r(h)}{h} \to 0 \quad (h \to 0)$$

Oft schreibt man dafür auch $r(h) = o(h)$

klein oh von h

(iv) Damit sieht man auch besonders schön, dass [oder sogar warum] Diffbarkeit stärker ist als Stetigkeit [vgl. 1.12]. Es gilt ja [2] 1.26]

$$f \text{ stetig in } \xi \Leftrightarrow f(\xi+h) - f(\xi) \to 0$$

nur das & nicht mehr

Wählen wir also irgendein $a \in \mathbb{R}$ und schreiben

$$f(\xi+h) - f(\xi) = a \cdot h + r(h) \quad \left[\text{d.h. } r(h) := f(\xi+h) - f(\xi) - ah\right]$$

dann gilt

$$f \text{ stetig in } \xi \Leftrightarrow r(h) \to 0$$

und es ist keine Rede von $\frac{r(h)}{h} \to 0$ oder davon, dass a eindeutig bestimmt ist — was ja aus dem Zusatz in 1.18 folgt. [siehe auch UE]

Nach dieser langen Bem zum erfreulich kurzen

Beweis von 1.19

„$\Rightarrow$": Setze $r(h) = f(\xi+h) - f(\xi) - f'(\xi)h$. Für $0 \neq h$ mit $\xi + h \in I$ gilt dann

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - f'(\xi) \xrightarrow{(h\to 0)} f'(\xi) - f'(\xi) = 0$$

„$\Leftarrow$": Sei wieder $0 \neq h$ mit $\xi + h \in I$. Laut Voraussetzung gilt

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = a + \frac{r(h)}{h} \to a + 0 \quad (h \to 0),$$

also ist f diffbar in ξ mit $f'(\xi) = a$ $\square$

1.21 Bsp (Der Sinus bei 0)

Wir veranschaulichen die Situation von 1.19 am Bsp der Sinusfkt: $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$1.8\,(v) \Rightarrow \sin'(x) = \cos(x) \Rightarrow \sin'(0) = \cos(0) \overset{\boxed{2}\ 3.22(ii)}{=} 1 \quad (*)$$

$1.19 \overset{\xi = 0}{\Longrightarrow}$

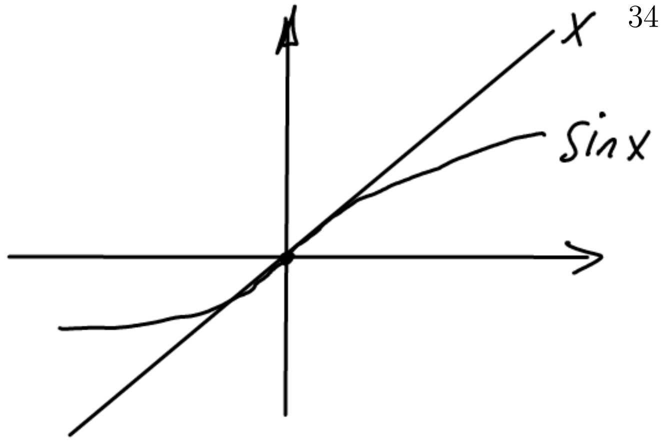
$$\begin{aligned} \sin(h) &= \sin(0+h) \\ &= \sin(0) + \sin'(0)\cdot h + r(h) \\ &\overset{\boxed{2}\ 3.22(ii)\ (*)}{=} 0 + h + r(h) \\ &= h + r(h) \end{aligned}$$

mit $r(h) = \sin(h) - h = o(h)$

das wissen wir im übrigen auch schon aus $\boxed{2}$ 3.17 (vi)

$$\frac{\sin h}{h} \to 1$$

Graphisch bedeutet das, dass sin nahe 0 wie id aussieht.



1.22 MOTIVATION (Zurück zum Baukasten)

Jetzt kehren wir endlich wieder zu unserem Baukastensystem zurück und erweitern ihn. Prop 1.15 hat ja schon einiges gebracht [siehe auch UE], aber zum ganzen Glück fehlt uns noch die Verträglichkeit der Differentiation mit der Verknüpfung [vgl auch [2] 1.17(ii) im Fall der Stetigkeit]. Sie wird uns auch die Türe zur Differentiation der Umkehrfunktion öffnen. Kurz gesagt, wir marschieren in Richtung Kettenregel und Inversenregel – dabei können wir die Rost-schreibweise aus 1.18 gleich gut gebrauchen [müssten wir aber nicht verwenden vgl. [Hö], Beweis von Thm 7.9]

1.23 THM (Kettenregel) Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und seien $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ reelle Fkt sodass $f(I) \subseteq J$.

sonst ist die Verknüpfung nicht def.; vgl. [2] 1.3(iii)

Ist f diffbar in $\xi \in I$ und ist g diffbar in $\eta := f(\xi) \in J$, dann ist die Verknüpfung $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in ξ und es gilt $(g\circ f)'(\xi) = g'(f(\xi))\cdot f'(\xi)$

1.24 BEM (Zur Kettenregel)

(i) (Schreibweise) In der Leibnitz'schen Schreibweise hat die Kettenregel die folgende suggestive Form

$$\frac{dg}{d\xi} = \frac{dg}{df}\cdot\frac{df}{d\xi}$$

Wobei hier g mittels Verknüpfung mit f als Fkt von ξ zu verstehen ist, also $g(\xi) := g\circ f(\xi)$.

(ii) (Beweisidee für 1.23) Folgende (einfache & brutale) Beweisstrategie/Rechnung ist naheliegend: Sei $\xi \neq x \in I$, dann gilt

$$\frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x-\xi} = \frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{f(x)-f(\xi)}\ \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

Dieser Ausdruck muss ja berechnet werden

Trick?

$$\longrightarrow g'(f(\xi))\cdot f'(\xi)$$

Das Problem dabei ist aber, dass $f(x)-f(\xi)=0$ gelten könnte. Somit ist der Trick zwar nett, funktioniert aber nicht unmittelbar. Er kann direkt repariert werden (siehe [Hö, 7.9]) oder man kann (wie wir es gleich tun werden) das Problem mittels der Rest-Schreibweise aus 1.19 umgehen.

Beweis von 1.23. Wir verwenden 1.19 um die Voraussetzung umzuschreiben (h, k sodass $\xi+h\in I$, $\eta+k\in J$)

$$f \text{ diff'bar in } \xi \overset{1.19}{\Longrightarrow} f(\xi+h)-f(\xi)=f'(\xi)h+r_1(h) \quad \text{mit} \qquad (*)$$

$$\rho_1(h):=\frac{r_1(h)}{h}\to 0 \quad (h\to 0)$$

$$g \text{ diff'bar in } \eta \overset{1.19}{\Longrightarrow} g(\eta+k)-g(\eta)=g'(\eta)k+r_2(k) \quad \text{mit} \qquad (**)$$

$$\rho_2(k):=\frac{r_2(k)}{k}\to 0 \quad (k\to 0)$$

Daraus folgt

$$g\circ f(\xi+h)-g\circ f(\xi) = g(f(\xi+h))-g(f(\xi))$$

Diesen Ausdruck müssen wir anschauen vgl. 1.19

$k=f(\xi+h)-f(\xi)$, $\eta=f(\xi)$

$$\overset{(**)}{=} g'(\eta)\big(f(\xi+h)-f(\xi)\big)+r_2\big(f(\xi+h)-f(\xi)\big)$$

$$\overset{(*)}{=} g'(\eta)\big(f'(\xi)h+r_1(h)\big) + r_2\big(f'(\xi)h+r_1(h)\big)$$

$$= g'(\eta)f'(\xi)h+r(h), \qquad (***)$$

wobei

$$r(h) = g'(\eta)r_1(h)+r_2\big(f'(\xi)h+r_1(h)\big)$$

$$\overset{(*),(**)}{=} g'(\eta)\rho_1(h)\cdot h+\rho_2\big(f'(\xi)h+r_1(h)\big)\cdot\big(f'(\xi)h+r_1(h)\big)$$

und daher

$$r(h)/h = g'(f(\xi))\underbrace{\rho_1(h)}_{\to 0}+\underbrace{\rho_2\big(\overset{\to 0}{f'(\xi)h}+\overset{\to 0}{r_1(h)}\big)}_{\to 0}\big(f'(\xi)+\rho_1(h)\big)$$

$$\to 0 \quad (h\to 0).$$

Nun folgt mit (der Rückrichtung von) 1.18, dass $g \circ f$ diff bar in ξ ist mit $(g\circ f)'(\xi) \underset{(***)}{=} g'(f(\xi))f'(\xi)$. $\square$

1.25 BEM (Ableitung der Umkehrfkt) Seien I, J Intervalle.

Sei $f: I \to J \subseteq \mathbb{R}$ eine reelle bijektive Fkt auf einem Intervall. Angenommen f ist diffbar in $\xi \in I$ und die Umkehrfkt $f^{-1}: J \to I$ ($\exists$ weil f bijektiv) ist diffbar in $\eta = f(\xi)$. Wir können daher die Kettenregel in ξ anwenden auf

$$f^{-1} \circ f = id_I \qquad \text{[vgl. EMA 4.3.30]}$$

Das ergibt $$\left(f^{-1}\circ f\right)'(\xi) \overset{1.23}{=} \left(f^{-1}\right)'(f(\xi)) \cdot f'(\xi) = id'(\xi) \overset{1.8(ii)}{=} 1 \;. \quad (*)$$

Insbesondere gilt also $f'(\xi) \neq 0$ und wir können $(*)$ mit $\xi = f^{-1}(\eta)$ umschreiben zu

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}}$$

Bemerke, dass wir in dieser Aussage die Diffbarkeit von f^{-1} in η vorausgesetzt haben. Eine Möglichkeit die Diffbarkeit von f^{-1} aus der von f zu folgern lernen wir als nächstes kennen.

1.26 Erinnerung/Motivation (Umkehrfkt) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to f(I) =: J$ stetig und streng monoton. Dann besagt [2] Thm 2.18, dass J ein Intervall, f bijektiv und $f^{-1}: J \to I$ stetig & str. monoton ist.

Wir werden nun zeigen, dass dann aus der Diffbarkeit von f in $\xi \in I$ unter der Bedingung $f'(\xi) \neq 0$ schon die Diffbarkeit von f^{-1} in $\eta = f(\xi)$ folgt. Wegen 1.25 ist diese Bedingung auch notwendig!

1.27 THM (Diffbarkeit der Umkehrfkt)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig auf dem Intervall I. Ist f diffbar in ξ mit $f'(\xi) \neq 0$, dann ist die Umkehrfkt $f^{-1}: J := f(I) \to I$ diffbar in $\eta := f(\xi)$ und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(\eta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}$$

Beweis. Sei $(\eta_n)_n$ eine Folge in $J \setminus \{\eta\}$ mit $\eta_n \to \eta$.

f bij. $\Longrightarrow$ $(\xi_n) := (f^{-1}(\eta_n))$ ist Folge in $I \setminus \{\xi\}$

f^{-1} stetig $\Longrightarrow$ $\xi_n \to \xi$

Daher gilt

f diffbar in ξ, $f'(\xi) \neq 0$, [1] 2.26

$$\frac{f^{-1}(\eta_n) - f^{-1}(\eta)}{\eta_n - \eta} = \frac{\xi_n - \xi}{f(\xi_n) - f(\xi)} \longrightarrow \frac{1}{f'(\xi)} \quad (n \to \infty)$$

und (wegen 1.6(ii), 1.4) ist f^{-1} diffbar in η mit Ableitung

$$(f^{-1})'(\eta) = 1/f'(\xi) = 1/f'(f^{-1}(\eta)).$$

$\square$

1.28 BSP (Ableitung des Logarithmus und eine berühmte Formel)

(i) Die Logfkt ist diffbar auf $(0,\infty)$ [also auf ihrem ganzen Defbereich] und es gilt

[vgl. [2] 3.2]

$$\log'(x) = 1/x$$

Tatsächlich ist $\log = \exp^{-1}$ [[2], 3.2(iii), so ist log definiert!] und exp ist diffbar auf ganz $\mathbb{R}$ [1.8(iv)] mit $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$ [[1] 4.40(i)]. Also können wir 1.27 anwenden und erhalten

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

(ii) Mittels (i) können wir die berühmte Formel

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

herleiten, die oft auch als Definition der Eulerschen Zahl verwendet wird. [Wir haben e ja als $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ definiert, vgl. [1] 4.37.] Es gilt

$$\underline{1} \overset{(i)}{=} \log'(1) \overset{1.6(i)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n}) - \log(1)}{1/n}$$

$$\overset{\log(1)=0}{=} \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \log(1+\tfrac{1}{n})\right)$$

$$\overset{\boxed{2}\ 3.3}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\log(1+\tfrac{1}{n})^n\right)$$

$$\overset{\log \text{ stetig } \boxed{2}\ 3.22(ii)}{=} \underline{\log\left(\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n\right)},$$

und daher mittels exp auf beiden Seiten der Glg angewendet

$$e = e^1 = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^n.$$

1.29 Bsp (Weitere diffbare Fkt)

(i) Die allgemeine Potenzfkt ($\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in (0,\infty)$) ist diffbar und es gilt

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

und daher insbesondere

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = (x^{1/n})' = \frac{1}{n}x^{1/n-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tatsächlich können wir rechnen

$$(x^\alpha)' \overset{\boxed{2}\ \text{Def. } 3.5(i)}{=} \left(\exp(\alpha \log(x))\right)' \overset{1.23}{=} \exp'(\alpha \log x)(\alpha \log x)'$$

$$= \exp(\alpha \log x)\, \alpha \log'(x)$$

$$\underset{1.28(i)}{\overset{1.8(iv)}{=}} x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \underline{\alpha x^{\alpha-1}}$$

(ii) (Affine Variablentransformation) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diffbar, $a,b\in\mathbb{R}$. Dann gilt $g(x):=f(ax+b)$ ist diffbar mit

$$g'(x) \overset{1.23}{=} f'(ax+b)(ax+b)' = af'(ax+b).$$

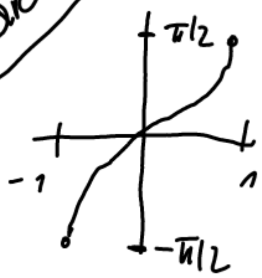
(iii) Der Arcussinus [[2] 3.28(ii)] ist auf $(-1,1)$ diffbar und es gilt

$\arcsin = \sin^{-1}$

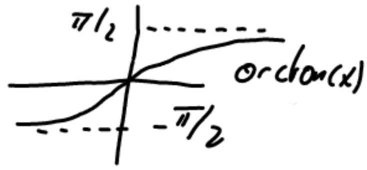
$$\arcsin'(x) \overset{1.27}{=} \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$

$\cos = \sqrt{1-\sin^2}$



(iv) Der Arcustangens [[2] 3.28(iii)] ist diffbar auf seinem ganzen Defbereich $\mathbb{R}$ und es gilt



$$\arctan'(x) \overset{1.27}{=} \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \overset{1.16(ii)}{=} \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

1.30 BEM (Höhere Ableitungen)

(i) (Notation & Def) Sei $f: I\to\mathbb{R}$ auf (ganz I) diffbar. Dann definieren wir die Ableitungsfunktion durch

$$f': I\to\mathbb{R},\ x\mapsto f'(x)$$

und wir können uns die Frage nach Eigenschaften dieser Fkt f' stellen – insbesondere nach ihrer Diffbarkeit.

Ist f' in $\xi \in I$ diffbar so schreiben wir $f''(\xi)$ für die Ableitung von f' in ξ und nennen $f''(\xi)$ die 2. Ableitung von f in ξ. Ist f' auf ganz I diffbar, so definieren wir die Fkt

$$\begin{aligned} f'' : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f''(x). \end{aligned}$$

und nennen sie die 2. Ableitungsfunktion von f. Oft schreibt man auch $f^{(2)}$ für f''

Induktiv definieren wir nun die n-te Ableitung von f in $\xi \in I$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ via (falls $\exists$)

$$f^{(n)}(\xi) = \left(f^{(n-1)}\right)'(\xi)$$

die n-te Ableitung ist die Ableitung der (n-1)-ten Abl.

In diesem Zusammenhang schreiben wir auch $f^{(0)}$ für f selbst.

(ii) (Ein Bsp)

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$\sin''(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\sin'''(x) = -\sin'(x) = -\cos(x)$$

$$\sin^{(4)}(x) = -\cos'(x) = \sin(x)$$

$$\sin^{(5)}(x) = \sin'(x) = \cos(x), \quad \text{usw.}$$

Also gilt

$$\boxed{\sin^{(2n)} = (-1)^n \sin, \quad \sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos}$$

Somit ist sin beliebig oft diffbar, d.h. n-mal diffbar für jedes $n \in \mathbb{N}$. Solche Fktionen nennt man auch glatt oder $\mathcal{C}^\infty$-Fkt.

Funktionen, die n-mal diffbar sind und deren n. Ableitung stetig ist, nennt man auch n-mal stetig differenzierbar oder $\mathcal{C}^n$-Funktionen.

(iii) WARNUNG!

($\mathcal{C}^n \not\Rightarrow \mathcal{C}^{n+1}$)

Eine diffbare Funktion muß keine diffbare Ableitung haben. z.B ist $f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 & x \ge 0 \end{cases}$ zwar $\mathcal{C}^1$ aber nicht 2x-diffbar.
[Details UE]

(diffbar $\not\Rightarrow \mathcal{C}^1$)

Noch schlimmer muß die Ableitung einer diffbaren Fkt nicht einmal stetig sein, z.B ist

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

diffbar aber nicht $\mathcal{C}^1$
[Details UE]

§2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

2.1° Intro. In diesem § kommen wir zu ersten Anwendungen der Differentialrechnung. Wir werden sehen, dass sich viele Eigenschaften von Fkt in ihrer Ableitung widerspiegeln (vgl. 0.1). Insbesondere werden wir die Monotonie, die Konvexität und das Auftreten lokaler Extrema mithilfe der Ableitung untersuchen. Außerdem werden wir aus Schranken an die Ableitung Schranken an die Fkt. selbst gewinnen und die aus der Schulmathematik wohlbekannten Regeln von de l'Hospital beweisen.

Der Schlüssel zu all diesen Resultaten ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS) den wir ausführlich diskutieren.

Wir beginnen mit einer Sprechweise

1.1A Notation/Sprechweise (Randpunkte & innere Pkte von Intervallen)

Sei I ein Intervall

(i) Falls I beschränkt ist, also von der Form [vgl [0] 1.6]
$[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ oder (a,b), dann heißen
a & b Randpunkte von I.

(ii) Falls I halbbeschränkt ist, also von der Form $[a,\infty)$ oder (a,∞) (bzw. $(-\infty,b]$ oder $(-\infty,b)$) dann heißt a (bzw. b) Randpunkt von I

(iii) $\xi \in I$ heißt innerer Punkt von I, falls ξ kein Randpunkt ist.

(iv) Z.B ist die Menge der inneren Punkte (das sog. Innere) von $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ und (a,b) jeweils (a,b).
Insbesondere besteht jedes offene Intervall nur aus inneren Punkten, ist also gleich seinem Inneren.

2.2 DEF (lokale Extremwerte) Sei I ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

(i) Ein Pkt $\xi \in I$ heißt lokales Maximum von f falls es eine Umgebung von ξ gibt auf der f nur Funktionswerte kleiner-gleich $f(\xi)$ annimmt, d.h. falls

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: \ f(\xi) \geq f(x). \qquad (*)$$

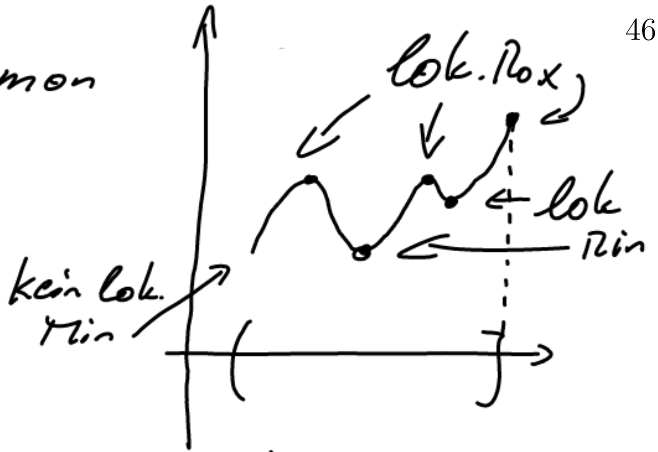
(ii) Der Pkt ξ heißt striktes lokales Maximum von f, falls in $(*)$ „$>$" statt $\geq$ gilt, d.h. falls

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: \ f(\xi) > f(x).$$

(iii) Analog sind (strikte) lokale Minima definiert, d.h ξ heißt (striktes) lokales Minimum, falls

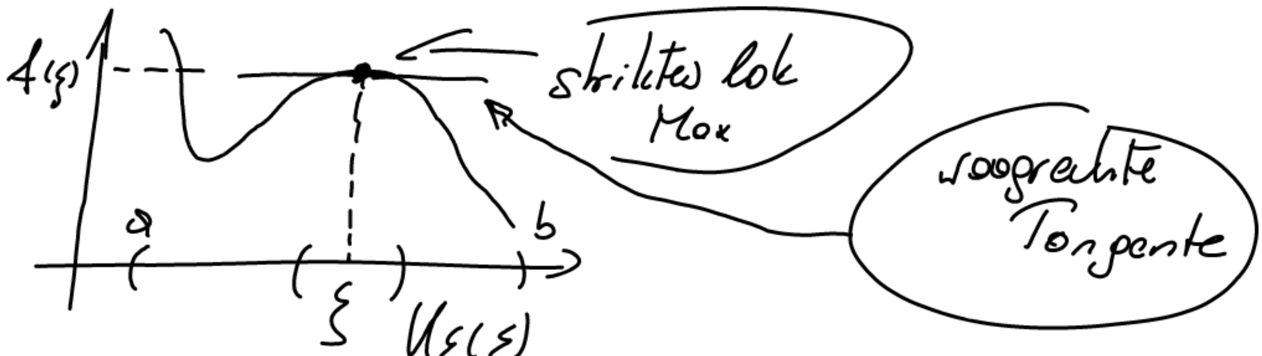
$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: \ f(\xi) \leq f(x) \ \ \big(f(\xi) < f(x)\big).$$

(iv) In beiden Fällen spricht man von einer (strikten) lokalen Extremstelle oder einem (str.) lok. Extremum



2.3 BEM (Extrema & Ableitung, die Idee)

(i) Der Inhalt von Def 2.2 für inner Punkte ξ (für ein str. lok. Max.) kann so veranschaulicht werden



(ii) Geometrisch erwarten wir uns, dass – falls f diffbar in ξ ist – f dort eine waagrechte Tangente hat, also $f'(\xi) = 0$ gilt.
Tatsächlich ist das eine notwendige Bedingung, wie wir gleich sehen werden

2.4 PROP (Notwendige Bedingung f. lok. Extrema)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar und sei ξ ein innerer Pkt von I. Falls ξ lokales Extremum von f ist, dann gilt $f'(\xi) = 0$.

Bew: Wir behandeln nur den Fall des lok. Max, der Fall des Min ist völlig analog.

Sei also ξ ein (nicht notwendigerweise strikter) lok. Max. Dann gilt

$$\overset{2.2(i)}{\Longrightarrow}\ \exists \varepsilon>0\ \forall x\in U_\varepsilon(\xi)\quad f(\xi)\geq f(x)$$

$$\overset{f \text{ diffbar in } \xi}{\Longrightarrow}\ \lim_{x\nearrow\xi}\underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\geq 0} = f'(\xi) = \lim_{x\searrow\xi}\underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\leq 0}$$

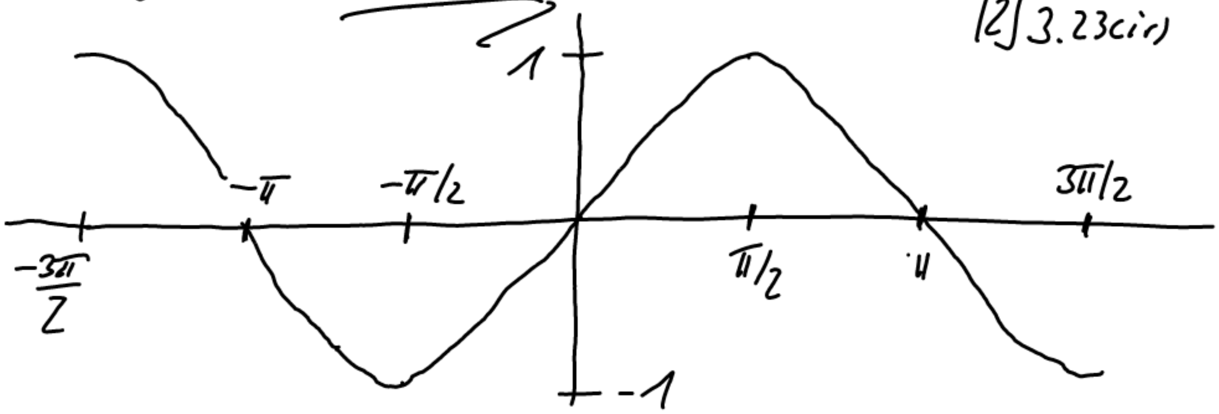
[Zähler ≤ 0, Nenner ≤ 0] [Zähler ≤ 0, Nenner ≥ 0]

Also $0\leq f'(\xi)\leq 0$ und damit $f'(\xi)=0$. $\square$

2.5 BSP (Extrema des Sinus) Wir betrachten $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

In [2] 3.24(ii) haben wir bereits festgestellt, dass die Extrema des Sinus in $\pi/2+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ liegen.
[mittels $\sin^2x+\cos^2x=1$ sind es genau die NST des cos]

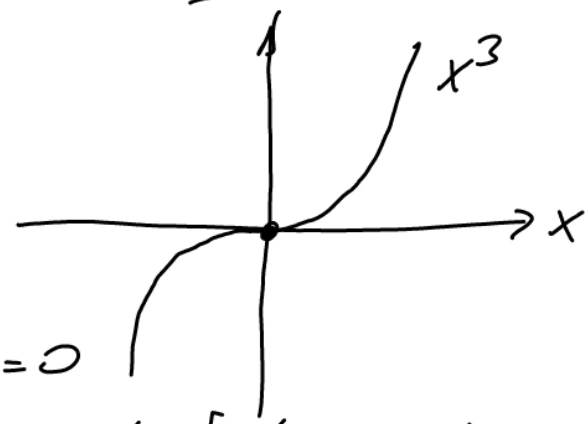
Tatsächlich gilt $\sin'\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\overset{[2]\ 3.23(ii)}{=}0$



2.6 WARNUNG (Notwendig vs hinreichend, lokal vs. global)

(i) 2.4 sagt, dass $f'(\xi)=0$ notwendige Bedingung für ein lok. Extr. ist — Sie ist nicht hinreichend, wie folgendes Bsp zeigt

$f:(-1,1)\to\mathbb{R}$
$f(x)=x^3$



Es gilt $f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(0)=0$
aber $\xi=0$ ist kein lokales Extr [denn jede Umgebung $U_\varepsilon(0)$ enthält pos & negative x und damit nimmt f auf $U_\varepsilon(0)$ pos & neg. Werte an]

Daher gilt also

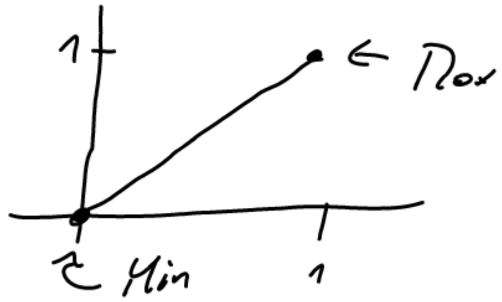
$$\boxed{\text{lok Extr} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f'(\xi)=0}$$

und Nullstellen von f' sind nur Kandidaten für lok. Extr.

(ii) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, dann besagt [2] Thm 2.11, dass f globale Max & Min auf $[a,b]$ besitzt.

Diese können am Rand von $[a,b]$ liegen, also in a oder in b. Selbst falls f diff bar auf $[a,b]$ ist (mit einseitigen Ableitungen in a,b) müssen $f'(a)$ und $f'(b)$ nicht verschwinden, wie das folgende Bsp zeigt.

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$
$f(x)=x$



Dann hat f ein Min in $\xi=0$ und ein Max in $\xi=1$ aber $f'(0)=1=f'(1)$.

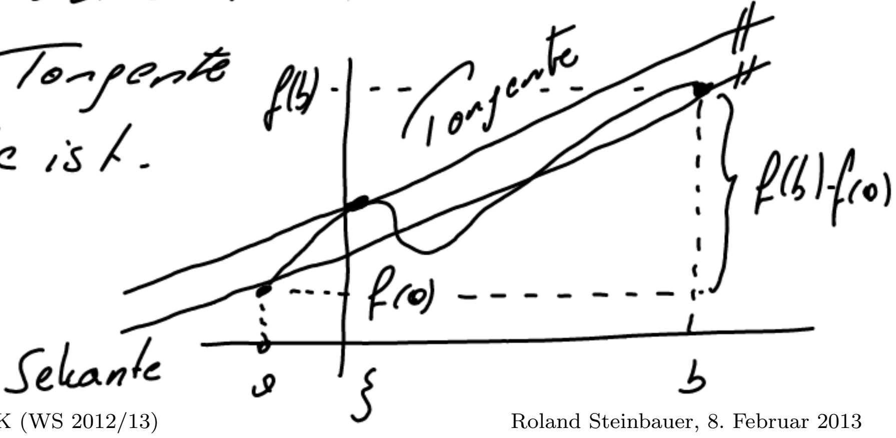
Dieses Bsp steht <u>nicht</u> im Widerspruch zu 2.6., da 0 & 1 keine inneren Pkte von $I=[0,1]$ sind, also 2.6 über $f'(0)$, $f'(1)$ keine Aussage macht.

Wenn wir andererseits $f(x)=x$ auf $I=(0,1)$ betrachten, dann hat f weder Min noch Max (nur inf & sup) und das Problem löst sich in Luft auf...

2.7 Motivation (lokale Änderungsrate – globale Eigenschaften) – MWS

(i) Wir unternehmen jetzt den ersten Schritt, der es uns erlauben wird, aus der Kenntnis der Ableitung einer Fkt (in allen Pkten eines Intervalls) globale Eigenschaften der Fkt abzuleiten: den <u>Mittelwertsatz</u> (MWS)

(ii) Dessen Aussage ist anschaulich evident:
Im Intervall I muß es einen Pkt geben in dem die Tangente parallel zur Sekante ist.



(iii) Der Satz hat auch eine anschauliche Bedeutung im Rahmen der Mechanik (vgl. 1.11):
Ein Auto fährt auf einem Autobahnstück der Länge 135 km und legt dieses in 1 Stunde zurück. Dann muß irgendwann die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von 130 km/h überschritten worden sein.
Hier entspricht die Ableitung der Ortsfunktion der Momentangeschwindigkeit und es muß einen Zeitpkt geben an dem diese gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit von 135 km/h ist.

Nun zur exakten Formulierung des MWS

2.8 THM (Mittelwertsatz)
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b). Dann gibt es einen Pkt $\xi \in (a,b)$ mit

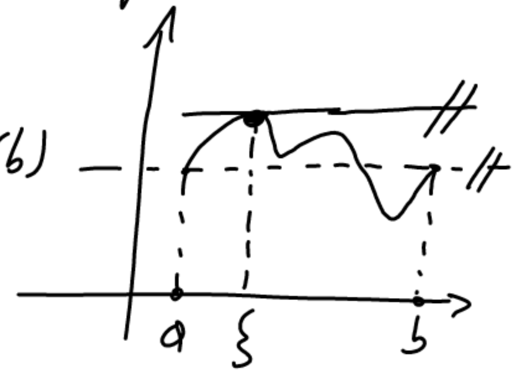
$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

oder (was dasselbe ist) mit

$$\boxed{f(b)-f(a) = f'(\xi)\,(b-a).} \qquad (2.1)$$

2.9 Bem (Beweisstrategie: „Kippen" des Graphen)
(i) Die grundlegende Beweisstrategie besteht darin, den Graphen von f zu modifizieren und so

$f(a)=f(b)$ zu erreichen. Damit müssen wir lediglich einen Pkt mit $f'(\xi)=0$ finden, was wir mittels 2.4 tun werden.



(ii) Die Idee ein solches ξ zu finden ist nun die folgende. Interpretieren wir f ob die „Höhenfunktion" bei einer Bergwanderung. Dann bedeutet $f(a)=f(b)$, dass wir uns am Abend auf derselben Seehöhe befinden wie in der Früh. Klarerweise können wir weder immer bergauf noch immer bergab gegangen sein. Vielmehr werden wir genau dort wo wir vom Bergaufgehen zum Bergabgehen übergegangen sind — also am Gipfel ($\hat{=}$ lok Max) — eine waagrechte Tangente (kein Anstieg) gehabt haben.

Diese Ideen gießen wir nun in wasserdichte Mathematik.

2.10 LEMMA (Satz von Rolle)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b). Falls $f(a)=f(b)$, dann gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit

$$f'(\xi)=0$$

Beweis. (erfreulich kurz)

(1) Falls f konstant ist $[f(x)=f(a)=f(b)\ \forall x\in(a,b)]$ ist die Aussage trivial $[f'(x)=0\ \forall x\in(a,b)_{1.8(i)}]$

Sei also f nicht konstant
$\Rightarrow \exists x\in(a,b)$ mit $f(x)>f(a)$ oder $f(x)<f(a)$;

sei OBdA $\underline{f(x)>f(a)}=f(b)$ $(*)$ [sonst analog]

(2) f stetig auf $[a,b] \overset{[2]\,2.11}{\Longrightarrow}$ f hat ein Max in $[a,b]$
d.h. $\exists\,\xi\in[a,b]$ mit

$(**)\quad f(\xi)\geq f(x)\ \forall\, x\in[a,b]$

(3) Wegen $(*)$ kann ξ nicht am Rand liegen, also ist ξ innerer Punkt $[\xi\in(a,b)]$ und wir können Prop 2.4 verwenden [beachte $(**)$]
$\overset{2.4}{\Longrightarrow} f'(\xi)=0.$ $\square$

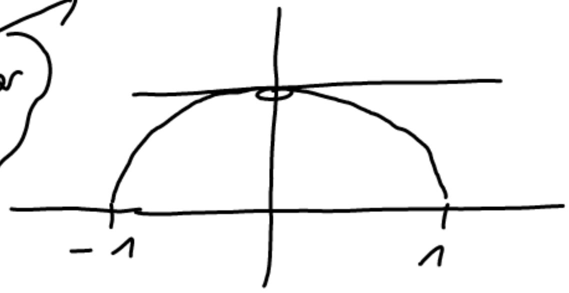
2.11 Bem (zum Satz von Rolle & seinem Beweis)

(i) Beachte, dass der Beweis & auch der Satz wesentlich auf [2] Thm 2.11 beruht, also darauf, dass stetige Fkt auf kp Mengen Min & Max besitzen.
[und somit letztlich auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.]

(ii) Die Voraussetzungen f stetig auf $[a,b]$ und diffbar auf dem Inneren (a,b) von $[a,b]$ ist natürlich teilweise redundant: aus diffbar in (a,b) folgt natürlich stetig in (a,b) [1.13].
Daher bewirkt die Voraussetzung f stetig in $[a,b]$ nur die Stetigkeit am Rand, also in a und b.

Natürlich hätten wir auch f diffbar auf $[a,b]$ voraussetzen können. Da diese Voraussetzung etwas stärker ist, würde das Lemma schwächer werden. z.B wäre die Fkt $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ auf $[-1,1]$ nicht erfaßt.

nichtdiffbar in ± 1 vgl. UE10[3]



(iii) Beachte, dass alle Voraussetzungen im Lemma tatsächlich notwendig sind. [Details UE].

(iv) Wir beweisen jetzt den MWS indem wir den Graphen der Fkt im MWS in „Rolle-Position" bringen.

2.12 Beweis des MWS. Sei f wie im Thm. Wir definieren
$$g(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$
Damit ist g stetig auf $[a,b]$, diffbar auf (a,b) und $g(a)=f(a)=g(b)$.

vgl. „Baukasten"

$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \xi \in (a,b)$ mit

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \square$$

2.13 Bem (Anwenden des MWS)

Der MWS ist ein reines Existenzresultat; in dem Sinn, dass die Existenz von ξ mit der entsprechenden Eigenschaft zwar garantiert ist er aber keine Möglichkeit liefert, ξ auch tatsächlich zu berechnen.

Daher wird der MWS meist in der Form (2.1) verwendet, um Abschätzungen herzuleiten. Das werden wir auch gleich tun und dabei erste Anwendungen der Differentialrechnung kennen lernen, die globale Aussagen über die Fkt ermöglichen; genauer über Wachstumsschranken & Monotonie.

vgl. 0.1

2.14 KOR (Wachstumsschranken)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b).

(i) Falls f' beschränkt ist, d.h. $\exists\, C>0$ mit

$$|f'(x)| \le C \quad \forall x\in(a,b),$$

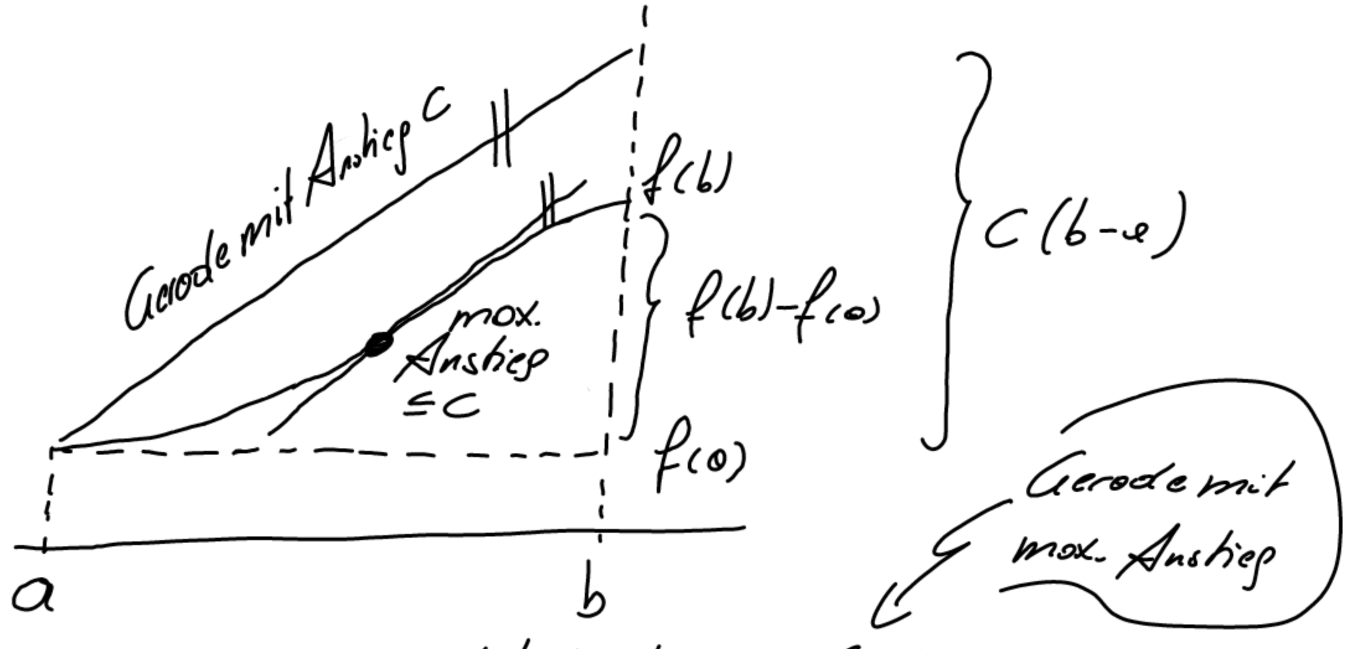
dann gilt für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$

$$|f(x_2)-f(x_1)| \le C\,|x_2-x_1| \qquad (2.2)$$

(ii) Falls $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$, dann ist f konstant [genauer $f(x) = f(a) = f(b) \ \forall x \in (a,b)$].

<u>2.15 Bem</u> (Lipschitzstetigkeit)

(i) Die Bedeutung von (i) kann leicht in einer Skizze veranschaulicht werden:



Eine Funktion f mit $|f'(x)| \le C \ \forall x$ kann nicht stärker wachsen als eine Gerade mit Anstieg C, bzw $f(b)$ muß kleiner sein als $f(a) + C(b-a)$, also $f(b) - f(a) \le C(b-a)$.

(ii) Funktionen, die (2.2) erfüllen heißen <u>Lipschitz-stetig</u> oder <u>dehnungsbeschränkt</u>, genauer $f : I \to \mathbb{R}$ heißt L-stetig, falls

$$\exists C > 0 : \ |f(x) - f(y)| \le C|x - y| \ \forall x, y \in I$$

Die Fktionswerte liegen also nicht weiter auseinander als die Argumente mal einer fixen Konstante C, genannt <u>Dehnungsschranke</u>.

(iii) Lipschitz stetige Fkt sind stetig, ja sogar glm. stetig. Die jeweiligen Umkehrungen sind falsch, d.h. für $f: I \to \mathbb{R}$ gilt (jeweils auf I)

$$\left\{ \text{Lipschitz stetig} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{glm stetig} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \text{stetig.} \right\}$$ [12] 2.15

Details siehe UE.

(iv) Wir können 2.14(i) nun auch so ausdrücken:
Diffbare Fkt mit beschränkter Ableitung sind nicht nur (glm.) stetig sondern sogar Lipschitz stetig.

Beweis (von 2.14 — erfreulich einfach ?)

(i) Sei f wie in der Behauptung. Dann gilt
$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ $\exists \xi \in (x_1, x_2)$:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \overset{(2.1)}{=} |f'(\xi)| \, |x_2 - x_1| \overset{\text{lt. Vorauss.}}{\leq} C|x_2 - x_1|. \quad (*)$$

(ii) Lt. Voraussetzung ist $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ — Verwende (i) mit $C=0$

$$\xRightarrow[C=0]{(*)} f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b]$$

$\square$

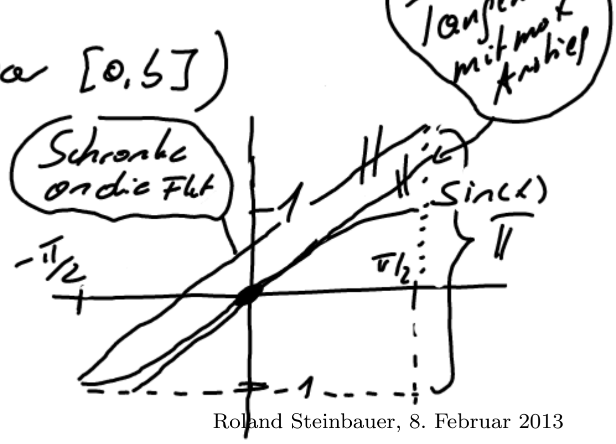
2.16 BSP (Sinus ist dehnungsbeschränkt)

Sei $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$

$\Longrightarrow f'(x) = \cos(x)$ $\forall x \in (a,b)$ (sogar $[a,b]$)

$\Longrightarrow |f'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$

$$\overset{2.14(i)}{\Longrightarrow} \underbrace{|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|}_{\forall x, y \in [a,b]}$$



2.17 PROP (Monotonie via Ableitung)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf (a,b). Dann gilt

(i) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f$ mon. wachsend auf $[a,b]$

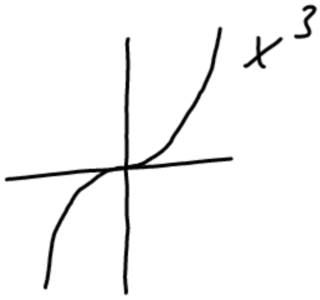
(ii) $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \implies f$ str. mon. wachs. auf $[a,b]$

(iii) Beide Punkte (i) & (ii) gelten analog für $f'(x) \underset{<}{\leq} 0$ und (str.) mon. fallend.

2.18 WARNUNG! Die Umkehrung von (ii) ist falsch, d.h.

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \ \not\Longleftarrow \ f \text{ str. mon. wachs. auf } [a,b].$$

Die Ableitung str. mon. Fkt kann in einzelnen Pkten verschwinden, wie etwa $f(x) = x^3$ lehrt: Es gilt f ist str. mon. wachsend, etwa auf $[-1,1]$ aber $f'(0) = 0$!



Beweis (von 2.17).

(i) „$\Rightarrow$" und (ii): Indir. ang f ist nicht (str.) mon. wachs.

$$\implies \exists\, x_1 < x_2 \in [a,b] \text{ mit } f(x_1) > f(x_2)$$

$$(\text{bzw. } f(x_1) \geq f(x_2))$$

$\overset{\text{MWS}}{\implies} \exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\implies f'(\xi) < 0 \ (\text{bzw } f'(\xi) \leq 0) \quad \text{Widerspr} \ \lightning$$

(i) „$\Leftarrow$": Da f mon. wachsend, gilt $\forall x, \xi \in (a,b)$, $x \neq \xi$

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} \geq 0$$

$\xi > x \Rightarrow$ Zähler & Nenner ≥ 0
$\xi < x \Rightarrow$ —— " —— ≤ 0

$$\Longrightarrow f'(\xi) \geq 0 \quad \forall \xi \in (a,b)$$

$\square$

2.19 KOR (Hinreichende Bedingung f. lok Extr)

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar, sei $\xi \in (a,b)$ und sei f 2-mal diffbar in ξ. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{l} f'(\xi) = 0 \\ f''(\xi) > 0 \ \left(f''(\xi) < 0\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{f hat ein striktes lok. Min (Max) im Punkt ξ}$$

<u>Beweis.</u> Sei ξ wie oben und $f'(\xi) = 0$, $f''(\xi) > 0$ [der Fall $f''(\xi) < 0$ ist völlig analog]

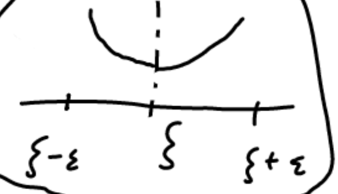
$$\Longrightarrow \quad 0 < f''(\xi) = \lim_{\xi \neq x \to \xi} \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x}$$

? Erkl?

$$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ sodass } \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$$

$f'(\xi) = 0$

$$0 < \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} = -\frac{f'(x)}{\xi - x}$$



$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall x \in (\xi - \varepsilon, \xi): \ f'(x) < 0 \overset{2.17}{\Longrightarrow} f \text{ str. mon f.} \\ \forall x \in (\xi, \xi + \varepsilon): \ f'(x) > 0 \overset{2.17}{\Longrightarrow} f \text{ str. mon. w} \end{array}\right\} \Longrightarrow \xi \text{ ist str. Min}$$

$\square$

2.20 Bsp (Nochmals Extrema des Sin)

Wie in 2.5 wiederholt wissen wir seit [2] 3.24(ii), dass die Extrema des sinus in $\pi/2 + \mathbb{Z}\pi$ liegen.
Wie in 2.5 nachgeprüft, gilt klarerweise die notwendige Bedingung für Extrema 2.4.
Es sind auch die jeweiligen hinreichenden Bedingungen aus 2.19 erfüllt:

$$\sin'\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \cos\left(\pi/2+k\pi\right) \overset{[2]\,3.22(iv)}{=} 0$$

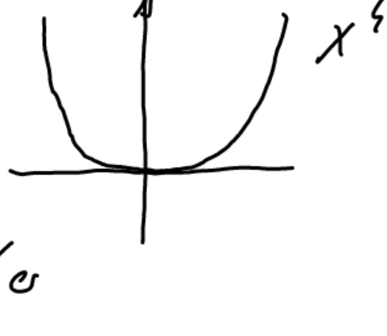
$$\sin''\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \begin{cases} +1 & k \text{ ungerade} \\ -1 & k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{Minima in } \frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi$$
$$\text{Maxima in } \frac{\pi}{2}+2k\pi$$

2.21 Warnung (Hinreichend nicht notwendig!)

Die Bedingung 2.19 ist nicht notwendig, wie das Bsp $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$

$$f(x) = x^4$$



zeigt: f hat ein striktes lokales Min in $\xi=0$ $[f(x)=x^4>0\ \forall x\neq 0]$ aber $f''(x)=12x^2$ und damit $f''(0)=0$.

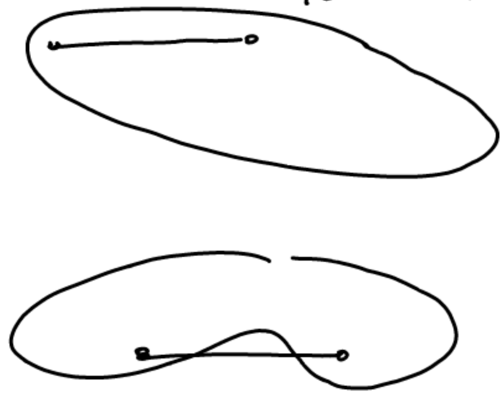
2.22 Motivation (Konvexität)

Als nächsten Begriff, den wir mittels Differentialrechnung beschreiben können, befassen wir uns mit dem

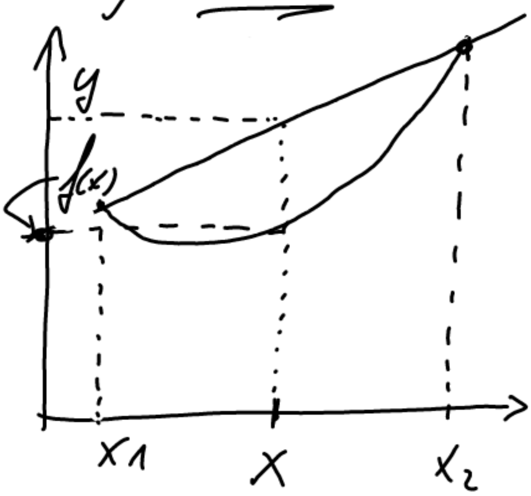
Krümmungsverhalten von Fkt und mit dem Begriff

KONVEXITÄT

(i) Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ wird konvex genannt, wenn mit je zwei Punkten schon die gesamte Verbindungsgerade in der Menge liegt.



(ii) Eine Fkt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ werden wir konvex nennen (offizielle Definition), falls die Menge über ihrem Graphen konvex ist. Anders ausgedrückt, falls die Sekante zwischen je 2 Pkten über dem Graphen liegt.



(iii) Diese Idee formalisieren wir wie folgt: Für $\lambda \in [0,1]$ durchläuft

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$$

das obige Intervall $[x_1, x_2]$. Analog durchläuft

$$y = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

die Sekante von $f(x_2)$ bis $f(x_1)$. Jetzt brauchen wir nur noch $f(x)$ mit y zu vergleichen: Ist $y \geq f(x)$, so liegt die Sekante über der Kurve.

Jetzt offiziell

2.23 DEF (Konvexe Fkt) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt auf dem Intervall I.

(i) Wir nennen f **konvex** (linksgekrümmt), falls $\forall x_1, x_2 \in I$ und $\forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

gilt.

(ii) Wir nennen f **konkav**, falls $-f$ konvex ist.

konkave Fkt

2.24 PROP (Konvexität via f'')

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar. Dann gilt

$$f \text{ konvex} \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

NICHT VORGETRAGEN

Beweis. „$\Leftarrow$" Wir prüfen die Bedingung in 2.23(i) nach. Dazu sei (oBdA) $x_1 < x_2$ und $0 < \lambda < 1$. Wir setzen

$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \quad [\Rightarrow x_1 < x < x_2]$

$\overset{2.17(i)}{\Longrightarrow}$ f' ist mon wachsend auf $[x_1, x_2]$

$\overset{MWS}{\Longrightarrow}$ $\exists \xi_1 \in (x_1, x)$ $\exists \xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (*)$$

Es gilt $x - x_1 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1) > 0$

$x_2 - x = x_2 - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2 = \lambda(x_2 - x_1) > 0$

und damit folgt aus (*)

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{1-\lambda} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{\lambda}$$

und daher

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$
$$f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

„NICHT VORGETRAGEN"

„$\Rightarrow$" Indirekt ang $\exists \xi$ mit $f''(\xi)<0$. Wir sehen

$$\varphi(x) = f(x) - f'(\xi)(x-\xi) \qquad (x \in I) \qquad (*)$$

Dann gilt
- φ ist 2-mal diffbar auf I
- $\varphi'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0$
- $\varphi''(\xi) = f''(\xi) < 0$

$\xRightarrow{2.19}$ φ hat ein striktes lok. Maximum in ξ

$\xRightarrow{2.2(ii)}$ $\exists \varepsilon_0 > 0$: $\varphi(x) < \varphi(\xi)$ $\forall x \in U_{\varepsilon_0}(\xi) \subseteq I$

Insbesondere gilt für $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

$$\varphi(x-\varepsilon) < \varphi(\xi), \quad \varphi(x+\varepsilon) < \varphi(\xi) \text{ und daher}$$

$$f(\xi) = \varphi(\xi) > \frac{1}{2}\left(\varphi(\xi-\varepsilon) + \varphi(\xi+\varepsilon)\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left(f(\xi-\varepsilon) + f(\xi+\varepsilon)\right) \quad (**)$$

Setzen wir nun $\lambda = 1/2$, $x_1 = \xi - \varepsilon$, $x_2 = \xi + \varepsilon$, dann lautet (**)

$$f(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2}_{\xi}) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad \lightning \text{ zur Konvexität}$$

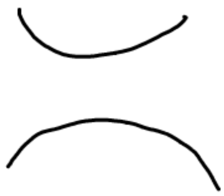
$\square$

2.25 BSP (Konvexe & konkave Fkt)

(i) (Quadratische Polynome) Sei $f(x)=ax^2+bx+c$ $(x\in\mathbb{R})$ mit $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

Es gilt $f''(x)=2a$ und damit (wegen 2.24)

$$f \text{ konvex} \iff a>0$$
$$f \text{ konkav} \iff a<0$$



(ii) Die <u>Exponentialfkt</u> ist <u>konvex</u>, denn

$$\exp''(x)=\exp(x)>0 \quad [1.8(iv), [1]\, 4.40(i)]$$

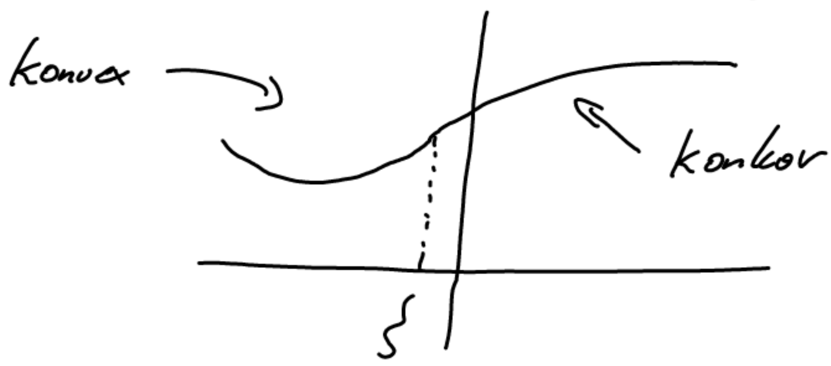
(iii) Die Logarithmusfkt ist konkav, denn

$$\log''(x)=(1/x)'=-1/x^2<0 \quad [1.28(i),(iii)]$$

2.26 BEM (Wendestellen)

(i) Punkte $\xi\in I$ in denen eine Fkt $f:I\to\mathbb{R}$ ihr Krümmungsverhalten ändert heißen <u>Wendepunkte</u> oder <u>Wendestellen</u>.

In einer Wendestelle ändert f ihr Verhalten von konkav auf konvex oder umgekehrt



(iii) Falls f genügend oft differenzierbar ist, dann besagt 2.24, dass eine Wendestelle ein Pkt ist, indem f'' das Vorzeichen wechselt, also insbesondere eine Nullstelle von f''!

Analog zum Fall lok. Extrema gibt es daher eine notwendige Bedingung für Wende-pkte ξ [$f''(\xi)=0$] und eine hinreichende Bedingung [$f''(\xi)=0$, $f'''(\xi)\neq 0$].
[Details UE]

2.27 MOTIVATION (Die Regeln von De L'Hospital)

(i) Das Problem: Bei der Berechnung von Grenzwerten der Form

$$\lim_{x\to\xi} f(x)/g(x)$$

tritt öfter einer der nicht definierten Fälle „0/0", „$\pm\infty/\pm\infty$" auf, wie etwa in

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\exp(x)}{x^k},\quad \lim_{x\to 0} x\log x=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x)}{1/x}.$$

Zwar haben wir diese Probleme – jeweils mit passenden Methoden / Tricks geknackt [[2] 3.8, [2] 3.17 (viii)], praktisch wäre allerdings eine allgemeine Methode. Eine solche kann mit Hilfe der Differentialrechnung tatsächlich angegeben werden.

(ii) Die Idee. Wir betrachten den Fall „0/0". Seien also f, g diffbar und $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0 = \lim_{x\to\xi} g(x)$ und $g'(x) \neq 0\ \forall x$.

Dann gilt [1.13] $f(\xi) = 0 = g(\xi)$ und somit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} = \frac{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}{\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}} \longrightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (*)$$

Wir dürfen also darauf hoffen, den limes $f(x)/g(x)$ durch den limes $f'(x)/g'(x)$ ersetzen zu können.

Tatsächlich wird uns dies gelingen. Zunächst benötigen wir eine technische Verallgemeinerung des MWS.

2.28 Lemma (Verallgemeinerter MWS)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig & diffbar auf (a,b). Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a,b)$ mit

$$(f(b)-f(a))\,g'(\xi) = (g(b)-g(a))\,f'(\xi).$$

2.29 Bem (zum VMWS) Falls $g'(x) \neq 0$ auf (a,b) und damit auch $g(b)-g(a) \neq 0$ [MWS $\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$. $g(b)-g(a) = g'(\xi)(b-a)$; $g'(\xi) \neq 0\ \forall \xi \in (a,b) \Rightarrow g(b)-g(a) \neq 0$] können wir die Formel in 2.28 umschreiben zu

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Und das ist schon ein Teil des heuristischen Arguments (*) in 2.26(ii).

Beweis von 2.28. Wende den Satz von Rolle auf die Fkt $\varphi(x) = \big(f(b)-f(a)\big)g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f(x)$ $(x \in [a,b])$ an. Details siehe [UE]. $\square$

2.30 SATZ (Regeln von de l'Hospital)

Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ diffbar und sei $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$. Sei außerdem

(i) $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \searrow a} g(x)$, oder

(ii) $\lim\limits_{x \searrow a} g(x) = \pm\infty$.

Dann gilt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Limes (evtl. als uneigentl. Limes $\pm\infty$) existiert. Analoges gilt für den Limes $x \nearrow b$.

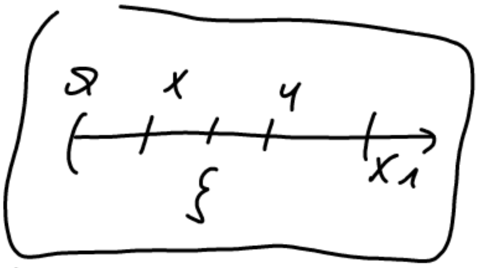
AUF FOLIE VORGETRAGEN

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $x \searrow a$.

(1) Sei zunächst

$$(*) \qquad \eta := \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Wir wählen y_0, y_1 mit $\eta < y_1 < y_0$



$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \exists\, x_1 \in (a,b)$ sodass

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < y_1 \quad \forall x \in (a, x_1) \qquad (**)$$

Seien nun $x, u \in (a, x_1) \overset{(VMWS)}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (x,u)$:

$g(x)-g(u) \neq 0$ vgl. 2.28

$$\frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \overset{(**)}{<} y_1 < y_0 \quad (***)$$

Im Fall (i) gilt für $x \searrow a$ wegen $(***)$

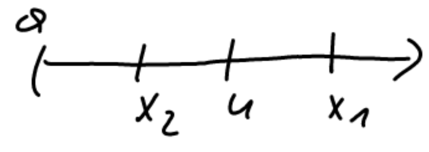
$$\boxed{\frac{f(u)}{g(u)} \le y_1 < y_0} \quad \forall u \in (a, x_1) \quad (\Delta)$$

Im Fall (ii) müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir behandeln nur $g(x) \to +\infty$, der andere Fall ist analog.

Zu jedem $u \in (a, x_1)$ bestimmen wir ein $x_2 \in (a, u)$ sodass

$$g(x) > \max\{0, g(u)\} \quad \forall x \in (a, x_2)$$

$$\Longrightarrow \frac{g(x)-g(u)}{g(x)} > 0 \quad \forall x \in (a, x_2)$$



$$\overset{(***)}{\Longrightarrow} \frac{f(x)-f(u)}{g(x)} < y_1 \frac{g(x)-g(u)}{g(x)}$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < \underbrace{y_1 - y_1 \frac{g(u)}{g(x)} + \frac{f(u)}{g(x)}}_{\to y_1 \ (x \searrow 0)} \quad \forall x \in (0, x_2)$$

$$\overset{(***)}{\Longrightarrow} \exists x_3: \boxed{\frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (0, x_3)} \quad (\Delta\Delta)$$

AUF FOLIE VORGETRAGEN

Zusammengefaßt gilt also in beiden Fällen (i) und (ii) $\forall y_0 > \eta \ \exists x_0$ sodass $[(\Delta), (\Delta\Delta)]$

$$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (0, x_0)} \quad (\Diamond)$$

(2) Analog folgt für $\eta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$: $\forall \tilde{y}_0 < \eta \ \exists \tilde{x}_0$:

$$\boxed{\tilde{y}_0 < \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in (0, \tilde{x}_0)} \quad (\Diamond\Diamond)$$

(3) Aus $(\Diamond)$ & $(\Diamond\Diamond)$ ergibt sich nun die Beh, denn falls $\eta = \pm\infty$ wird durch $(\Diamond)$ bzw $(\Diamond\Diamond)$ alles erledigt. Falls $\eta \in \mathbb{R}$ ergibt die Kombination von $(\Diamond)$ & $(\Diamond\Diamond)$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{x}_0$ sodass

$$\eta - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \eta + \varepsilon \ \forall x \in (0, \bar{x}_0) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to \eta. \quad \square$$

2.31 BSP (Die Regeln von De l'Hospital)

(i) Wir geben einen alternativen Beweis für [vgl. [2] 3.8 (vii)]

$$\underbrace{\frac{\log(x)}{x^\alpha} \to 0 \quad (x \to \infty)}$$

$$f(x) = \log(x) \to \infty \quad (x \to \infty) \qquad f'(x) = 1/x$$

$$g(x) = x^\alpha \to \infty \quad (x \to \infty) \qquad g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\overset{2.30}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

(ii) Wir berechnen $\lim\limits_{x \downarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$

NICHT VORGETRAGEN

Es gilt $\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)}$ und wir versuchen 2.30 anzuwenden. Es ergibt sich

$$f(x) = x - \sin(x) \to 0 \ (x \downarrow 0), \quad f'(x) = 1 - \cos(x)$$

$$g(x) = x\sin(x) \to 0 \ (x \downarrow 0), \quad g'(x) = \sin(x) + x\cos(x).$$

Nun gilt $f'(x) \to 0 \ (x \downarrow 0)$ und $g'(x) \to 0 \ (x \downarrow 0)$ und wir versuchen unser Glück mit einer zweiten Anwendung von 2.30 [d.h. angewendet auf f'/g']

$$f''(x) = \sin(x), \quad f''(x) \to 0 \ (x \downarrow 0)$$

$$g''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x\sin(x), \quad g''(x) \to 2 \ (x \downarrow 0)$$

Also gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) \overset{\text{2.30 zum Ersten}}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\text{2.30, zum Zweiten}}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 0$$

4 INTEGRATION

In diesem Kapitel wenden wir uns der Integralrechnung zu, der zweiten tragenden Säule der Analysis neben der Differentialrechnung.

In §1 entwickeln wir den Integralbegriff für „schöne" Funktionen auf abg. Intervallen. Genauer definieren wir das Riemann-Integral über den Zugang über Treppenfunktionen.

In §2 verknüpfen wir die Integral- mit der Differentialrechnung. Hier lernen wir das Hauptresultat der VO kennen, den Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung, der salopp gesprochen besagt, dass Differenzieren & Integrieren inverse Operationen sind. Dies ermöglicht unter anderem das explizite Berechnen von Integralen.

In §3 lernen wir den Satz von Taylor kennen, der es erlaubt „schöne" Funktionen rein aus der Kenntnis ihrer Ableitungen in einem Punkt zu rekonstruieren.

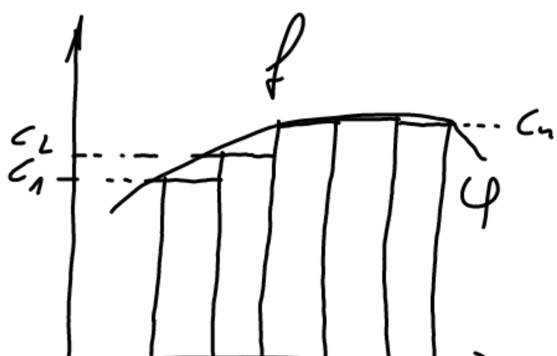
In §4 werden wir uns schließlich mit uneigentlichen Integralen beschäftigen, also mit Integralen auf unbeschränkten Intervallen oder wo der Integrand gegen den Rand des Intervalls unbeschränkt ist.

§1 DAS RIEMANN-INTEGRAL

In diesem § entwickeln wir den Integralbegriff. Dabei gehen wir so vor, dass wir zunächst das Integral für eine Klasse einfacher Fkt — die Treppenfkt — definieren. Dazu sind nur elementargeometrische Formeln notwendig (Flächeninhalt von Rechtecken). Das Integral für allgemeine Funktionen wird dann mittels Approximation durch Treppenfkt definiert.
Wir beginnen mit einer

1.1 INTRO (Zwei Wege zum Integralbegriff)

(i) Geometrische Motivation. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine pos. Fkt. Wir wollen den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse bestimmen (Fläche unter dem Graphen).
Falls f „hinreichend flach" ist, dann können wir erwarten, dass die Fläche gut durch Rechtecksflächen approximiert werden kann.



Die Fläche der Rechtecke können wir aber auch als die Fläche unter dem Graphen einer Treppenfkt auffassen (vgl. $\boxed{12}$ Def 2.1(x) und Uh. 1.2(i) unten)

Sei also $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Treppenfkt mit

[phi]

$$\varphi(t)=\begin{cases} c_1 & a=t_0\le t<t_1\\ c_2 & t_1\le t<t_2 \quad \text{[siehe Skizze]},\\ \vdots & \\ c_n & t_{n-1}\le t<t_n=b\end{cases}$$

wobei $c_1,c_2,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ passend für f gewählt sind. Ein Näherungswert für die Fläche A unter dem Graphen von f ist die Fläche unter dem Graphen von φ — und diese können wir berechnen

$$\boxed{A\approx\sum_{j=1}^{n}\underbrace{c_j}_{\text{Höhe des Rechtecks}}\underbrace{(t_j-t_{j-1})}_{\text{Basis des Rechtecks}}=\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_j)(t_j-t_{j-1})}$$

(ii) Motivation aus der Mechanik (vgl. $\boxed{3}$ 1.11)

Sei $s:[0,T]\to\mathbb{R}$ die Ortsfunktion eines Massenpunkts P. ($s(t)$ gibt die Position von P zum Zeitpunkt t an.) Dann ist die Momentangeschwindigkeit $v:[0,T]\to\mathbb{R}$ die Ableitungsfkt von s, also

$$v(t)=s'(t)=\frac{ds(t)}{dt}$$

Wir stellen uns nun folgende Aufgabe: Angenommen, wir kennen $s(0)$, also den Ausgangspunkt von P

und wir kennen $v(t)$ $\forall t \in [0,T]$. Wie können wir $s(t)$ für $0 < t \le T$ bestimmen?

Betrachten wir dazu ein „kleines" Zeitintervall $[t_1,t_2] \subseteq [0,T]$. Falls sich $v(t)$ auf $[t_1,t_2]$ wenig ändert (also fast konstant ist), dann können wir hoffen, dass folgende Näherung gut ist: Wir bestimmen den „Weggewinn" (Ortszunahme) gemäß der „Formel"

$$\boxed{\text{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit},}$$

also

$$s(t) \approx s(t_1) + v(t_1)(t - t_1) \qquad t \in (t_1,t_2)$$

Wenn wir diese Approximation auf den „kleinen" Zeitintervallen $(a = t_0, t_1]$, $[t_1,t_2]$, $\dots$, $[t_{n-1}, t_n = T]$ durchführen und die Terme addieren, so erhalten wir die Näherung

$$\boxed{s(T) = s(0) + \sum_{j=1}^{n} v(t_j)(t_j - t_{j-1}).}$$

Bemerkenswert ist, dass wir auch hier die Summe als Fläche unter dem Graphen einer Treppenfkt φ auffassen können, genauer

$$\varphi(t) = v(t_j) \quad \text{für} \quad t \in (t_{j-1}, t_j) \quad (j = 1, \dots, n)$$

(iii) In beiden Fällen haben wir gesehen, dass sich Treppenfunktionen als Grundbausteine einer Integrationstheorie anbieten (geradezu aufdrängen). Daher beginnen wir damit ein Integral für Treppenfkt zu definieren & seine Eigenschaften zu studieren. Zunächst wiederholen wir die (etwas technisch anmutende) Def dieser Klasse (schöner?) Fkt.

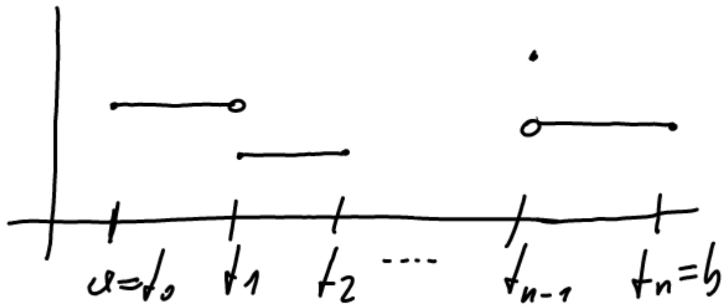
1.2. DEF (Treppenfkt)

(i) Eine Fkt $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfkt**, falls es

- eine endliche Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ des Intervalls $[a,b]$ gibt, d.h. $t_i \in [a,b]$ mit
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$
- und Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ sodass

$$\varphi(t) = c_j \quad \text{falls} \quad t \in (t_{j-1}, t_j) \quad (j = 1, \dots, n)$$

φ stückweise konst auf den offenen Intervallen; über $\varphi(t_j)$ wird nichts verlangt.



(ii) Wir bezeichnen die **Menge der Treppenfkt** auf $[a,b]$ mit

$$\mathcal{T}[a,b] := \{\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist Treppenfkt.}\}.$$

1.3 Lemma ($\mathcal{J}[a,b]$ ist ein Vektorraum) Es gilt

(i) $\varphi, \psi \in \mathcal{J}[a,b] \Longrightarrow \varphi + \psi \in \mathcal{J}[a,b]$

[psi] (ii) $\varphi \in \mathcal{J}[a,b], \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda\varphi \in \mathcal{J}[a,b]$.

Mit anderen Worten $\mathcal{J}[a,b]$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ($\mathcal{J}[a,b]$ ist ein Teilvektorraum von $\mathbb{R}^{[a,b]} := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ dem VR alle reellen Fkt auf $[a,b]$.) [$\rightsquigarrow$ Lineare Algebra]

Beweis. (ii) ist sofort klar nach Def [$\varphi(t) = c_j$ $t \in (t_{j-1}, t_j)$ $\Longrightarrow (\lambda\varphi)(t) = \lambda\varphi(t) = \lambda c_j$ $t \in (t_{j-1}, t_j)$]

(ii) Aus den Zerlegungen $Z = \{t_0, \dots, t_n\}$ für φ und $Z' = \{t'_0, \dots, t'_m\}$ für ψ erhält man die Zerlegung $\tilde{Z} := Z \cup Z'$. Diese kann man als $\tilde{Z} = \{a = s_0, s_1, \dots, s_e = b\}$ schreiben wobei φ und ψ und damit $\varphi + \psi$ auf (s_{j-1}, s_j) konstant ist [Details UE]. $\square$

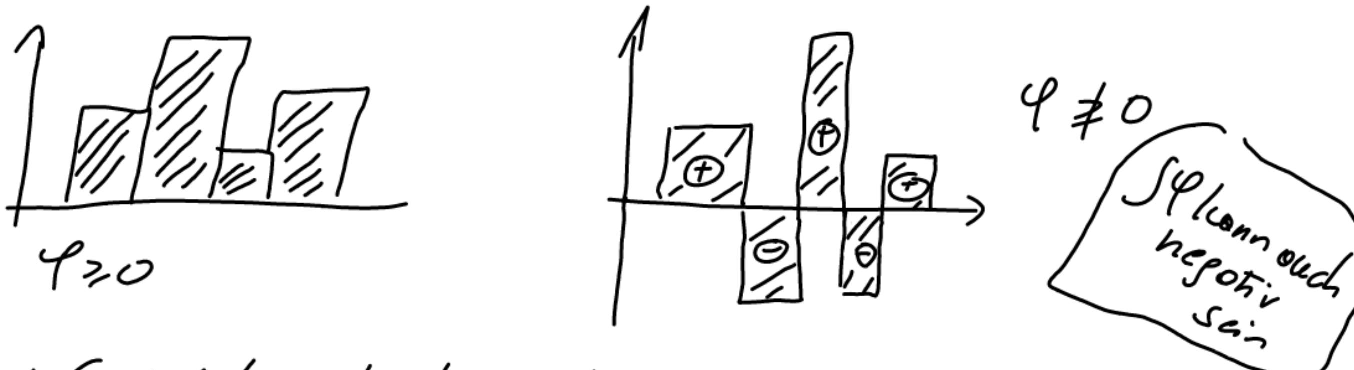
1.4 DEF (Integral für Treppenfkt) Sei $\varphi \in \mathcal{J}[a,b]$ mit Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ und Werten $\varphi(t) = c_j$ $(t \in (t_{j-1}, t_j), 1 \le j \le n)$. Wir definieren das Integral von φ auf $[a,b]$ als

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt := \sum_{j=1}^{n} c_j (t_j - t_{j-1})$$

Wir schreiben oft auch $\int \varphi$ statt $\int_a^b \varphi(t)\,dt$

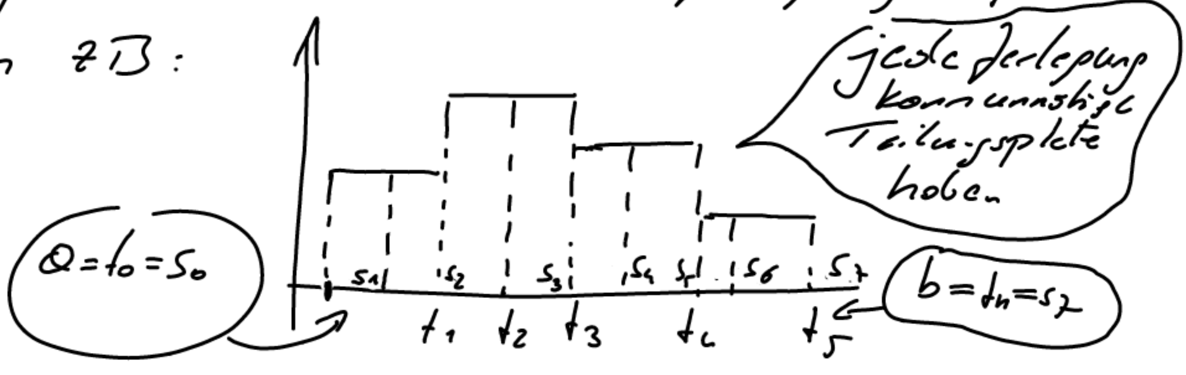
1.5 Bem (Zum Integral 1.4)

(i) Nochmals geometrische Deutung: Wie in 1.1(ii) diskutiert, ist für φ positiv $\int\varphi$ gerade die Fläche unter dem Graphen. Hat φ negative Werte, so werden gemäß Def 1.4 die entsprechenden Rechtecksflächen subtrahiert ($c_j < 0$!)



(ii) Wohldefiniertheit. Strenggenommen, müssen wir noch zeigen, dass das Integral in 1.4. wohldefiniert ist. Genauer: Def 1.2(ii) verlangt für $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$ die Existenz einer endl. Zerlegung – es könnte aber mehrere Zerlegungen für φ geben zB:

Def 1.3(ii) verlangt nicht $c_i \neq c_{i+1}$!!



Def 1.4 bezieht sich aber auf eine bestimmte Zerlegung und es ist zu zeigen, dass $\int\varphi$ nicht von der Wahl einer bestimmten Zerlegung abhängt.

Das ist graphisch evident, allerdings etwas auf-

wendig genau hinzuschreiben [siehe [Hö] Lemma in P. 2, [F] Bem p. 187].
[Der springende Punkt ist, dass die „unnötigen" Teilungspunkte keinen Schaden anrichten – aber Arbeit machen.]

(iii) Die Wohldefiniertheit des Integrals 1.4 erlaubt es uns das Integral als Abbildung aufzufassen

$$\int : \mathcal{T}[a,b] \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

Dieser Standpunkt erlaubt es, bestimmte Eigenschaften des Integrals strukturell besser zu formulieren und zu verstehen. ZB besagt die nächste Prop, dass $\int$ ein

lin Abb von VR in den Grundkörper

lineares Funktional [im Sinne der lin. Algebra] auf dem VR $\mathcal{T}[a,b]$ ist, das zusätzlich monoton ist.

1.6 PROP (Linearität & Monotonie des $\int$ auf $\mathcal{T}[a,b]$)

Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

(i) $\int_a^b (\varphi+\psi)(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt + \int_a^b \psi(t)\,dt$

(ii) $\int_a^b (\lambda\varphi)(t)\,dt = \lambda \int_a^b \varphi(t)\,dt$

(iii) $\underbrace{\varphi \le \psi}_{\varphi(x)\le\psi(x)\ \forall x\in[a,b]} \implies \int_a^b \varphi(t)\,dt \le \int_a^b \psi(t)\,dt$

Beweis. (i) Verwende für φ, ψ eine gemeinsame Zerlegung wie im Beweis von Lemma 1.3. Die gewünschten Eigenschaften folgen dann sofort aus korrespondierenden Eigenschaften für endliche Summen [Detail ev. UE].

(ii), (iii) klar. $\square$

1.7 MOTIVATION (Das Riemann-Integral)

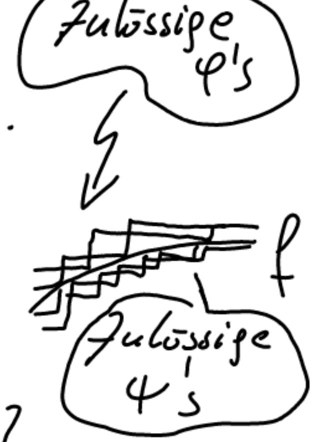
(i) Wir haben also einen vernünftigen Integralbegriff für besonders schöne Fkt, die Treppenfunktionen definiert.

d.h. mit guten Eigenschaften also als lin. mon. Funktional

Unser nächstes Ziel ist es, diesen Integralbegriff unter Beibehaltung dieser vernünftigen Eigenschaften auf eine größere Klasse von Fkt auszudehnen.

(ii) Die Grundidee ist dabei die folgende: Gegeben eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, dann betrachten wir alle Treppenfkt $\varphi\in\mathcal{T}[a,b]$ mit $f\le\varphi$ und das inf der Integrale über alle solchen φ, also

$$\alpha := \inf\left\{\int_a^b \varphi(t)\,dt \;\Big|\; \varphi\in\mathcal{T}[a,b],\ f\le\varphi\right\}.$$



Ebenso können wir alle $\psi\in\mathcal{T}[a,b]$ mit $\psi\le f$ und ihre Integrale betrachten und setzen

$$\beta := \sup\left\{\int_a^b \psi(t)\,dt \;\Big|\; \psi\in\mathcal{T}[a,b],\ \psi\le f\right\}$$

Falls diese beiden Zahlen übereinstimmen [i.a. gilt $\beta\le\alpha$], dann werden wir $\int_a^b f(t)\,dt = \alpha = \beta$ definieren.

NICHT VORGETRAGEN

(iii) Wie zwingend ist diese Vorgehensweise?
Sie ergibt sich zwangsläufig, falls
(1) das neue Integral für Treppenfkt mit dem Integral 1.4 übereinstimmen soll, und
(2) $f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$ gelten soll.

Denn für alle $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$, $f \leq \varphi$ gilt dann $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b \varphi(t)\,dt$ also $\int_a^b f(t)\,dt \leq \alpha$ und für alle $\psi \in \mathcal{T}[a,b]$, $\psi \leq f$ gilt $\int_a^b \psi(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt$, also $\beta \leq \int_a^b \psi(t)\,dt$.

Insgesamt also
$$\beta \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \alpha$$
und falls $\alpha = \beta$ ergibt sich zwangsläufig $\int_a^b f(t)\,dt = \alpha = \beta$.

Nun offiziell:

1.8. DEF (Riemann-Integral) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

(i) Wir definieren das Ober- bzw. Unterintegral von f als
$$\int_a^{b\,*} f(t)\,dt := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)\,dt \;/\; \varphi \in \mathcal{T}[a,b],\ f \leq \varphi \right\} \text{ bzw.}$$
$$\int_{a\,*}^{b} f(t)\,dt := \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)\,dt \;/\; \psi \in \mathcal{T}[a,b],\ \psi \leq f \right\}.$$

(ii) Wir nennen f Riemann-integrierbar, falls
$\int_a^{b\,*} f(t)\,dt = \int_{a\,*}^{b} f(t)\,dt$. In diesem Fall definieren wir das Riemann-Integral von f von a nach b als
$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^{b\,*} f(t)\,dt$$

1.9 BSP (R-intbare & nicht R-intbare Fkt.)

(i) Treppenfkt. Wie erwartet (& gewünscht) sind Treppenfkt R-intbar und das R-Integral stimmt mit dem Integral 1.4 überein.

Sonst hätten wir 2 unterschiedliche $\int$ für $\mathcal{T}$ & das wäre Quatsch!

Tatsächlich für $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$ gilt

$$\int_a^{b\,*} \varphi(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_{a\,*}^b \varphi(t)\,dt$$

Integral 1.4

$$\Longrightarrow \varphi \text{ R-intbar } \& \text{ R-}\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

(ii) Die Dirichletfkt $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist nicht R-intbar.

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$ ist beschränkt auf $\mathbb{R}$ also auch auf jedem $[a,b]$. Allerdings enthält jedes offene Intervall rationale und irrationale Zahlen [[1] 1.11(ii)] daher gilt

$\varphi \in \mathcal{T}[a,b],\ \chi_{\mathbb{Q}} \le \varphi \Longrightarrow \varphi \ge 1$ auf jedem Teilintervall einer Zerlegung

$\psi \in \mathcal{T}[a,b],\ \psi \le \chi_{\mathbb{Q}} \Longrightarrow \psi \le 0$ — " —

$$\Longrightarrow \int_a^{b\,*} \chi_{\mathbb{Q}}(t)\,dt = 1 \neq 0 = \int_{a\,*}^b \chi_{\mathbb{Q}}(t)\,dt$$

1.10 MOTIVATION (Integrabilitätskriterium)

Auch bei genauer Betrachtung erweist sich die Def der R-Intbarkeit als sperrig und schwer handhabbar. Abhilfe schafft das folgende Integrabilitätskriterium, dass besagt dass ein beschränktes $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ genau dann R-intbar ist, falls es zwischen 2 Treppenfktionen φ,ψ „eingezwickt" werden kann [$\varphi\le f\le\psi$] deren Integrale beliebig nahe beieinander liegen.

Diese Charakterisierung ist nur eine milde Umformulierung der Def und ebenfalls etwas technisch. Sie wird es uns aber ermöglichen ganze Klassen von Fkt, nämlich stetige Fkt & monotone Fkt als intbar zu entlarven.

1.11 THM (Integrabilitätskriterium: Einzwicken zw Treppenfkt)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt

$$f \text{ ist } R\text{-intbar} \iff \left\{\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0\ \exists\,\varphi,\psi\in\mathcal{T}[a,b] \text{ mit}\\ \varphi\le f\le\psi \text{ und}\\ 0\le\int_a^b\psi(t)\,dt-\int_a^b\varphi(t)\,dt\le\varepsilon\end{array}\right.$$

klar wegen Monotonie 1.6(iii)

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der Def der R-intbarkeit & den Eigenschaften von inf & sup. (evUE) $\square$

1.12 KOR (stetige Fkt & mon Fkt sind R-intbar)

(i) Jedes stetige $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist R-intbar

(ii) Jedes monotone $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist R-intbar

Zum Beweis von (i) benötigen wir ein Resultat, dass vieles von dem verwendet, was wir über stetige Fkt auf kompakten Intervallen wissen [vgl. [2] 2.1].

1.13 SATZ (Approximation stetiger Fkt durch Treppenfkt)

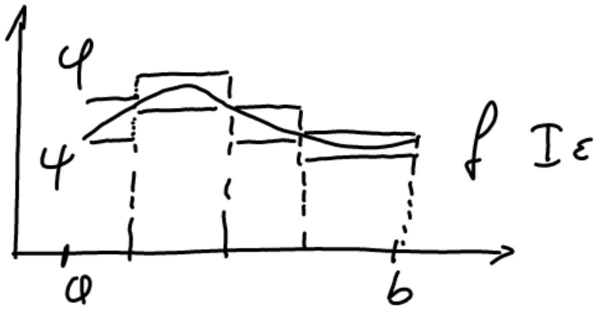
Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$\forall \varepsilon>0\ \exists \varphi,\psi\in \mathcal{T}[a,b]$ mit den Eigenschaften

(a) $\psi\le f\le\varphi$

(b) $|\varphi(x)-\psi(x)|\le\varepsilon \quad \forall x\in[a,b]$

FOLIE



Beweis. Sei $\varepsilon>0$.

(1) f ist glm stetig [[2] Thm 7.16]

$\overset{[2]\,2.14}{\Longrightarrow}\ \exists\,\delta>0$ sodass

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon \quad \forall x,x'\in[a,b] \text{ mit } |x-x'|<\delta \quad (*)$$

(2) (Konstruktion von φ,ψ)

Sei n so groß, dass $\frac{b-a}{n}<\delta$. $(**)$

Wir definieren eine (äquidistante) Zerlegung von $[a,b]$ via

$$t_k := a+k\,\frac{b-a}{n} \qquad (k=0,\dots,n)$$

Es gilt dann $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b,\ |t_k-t_{k+1}|\overset{(**)}{<}\delta \quad (***)$

Die Funktionswerte der Treppenfunktionen definieren wir wie $(1 \leq k \leq n)$

$$\left.\begin{aligned} c_k &:= \sup\{f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k\} \\ c_k' &:= \inf\{f(x) \mid t_{k-1} \leq x \leq t_k\}. \end{aligned}\right\} \quad (\Delta)$$

Wir setzen $\varphi(a) := f(a) =: \psi(a)$ und $(1 \leq k \leq n)$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &:= c_k \quad t_{k-1} < t \leq t_k \\ \psi(t) &:= c_k' \quad t_{k-1} < t \leq t_k \end{aligned}\right\}$$

Folie

(3) Nun gelten (a) nach Konstruktion (vgl. (Δ)) und (b), denn

$\circled{2}$ Thm 2.11 $\Longrightarrow \exists\, \xi_k, \xi_k' \in [t_{k-1}, t_k] \quad (1 \leq k \leq n)$:

$$f(\xi_k) = c_k, \quad f(\xi_k') = c_k'$$

$$\xRightarrow{(***)} |\xi_k - \xi_k'| < \delta \xRightarrow{(*)} |c_k - c_k'| < \varepsilon.$$

$\square$

Beweis von 1.12:

(i) Sei $\varepsilon > 0$. $\xRightarrow{1.13} \exists\, \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ mit $\psi \leq f \leq \varphi$ und $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon / (b-a)$ $(*)$

Daher gilt

$$0 \overset{1.6(iii)}{\leq} \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b \psi(t)\,dt$$

$$\overset{1.6(i),(ii)}{=} \int_a^b (\varphi(t) - \psi(t)) \underset{1.6(iii)}{\overset{(*)}{\leq}} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} \overset{\text{Zerlegung } a = t_0 < t_1 = b}{=} \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

$\xRightarrow{1.11} f$ ist R-intbar

(ii) Wir beweisen nur den Fall f mon. wachsend (der fallende Fall ist analog).

Wir konstruieren (wie in Bew 1.13, Schritt (2)) eine (äquidistante) Zerlegung von $[a,b]$ via

$$t_k = a + k\,\frac{b-a}{n} \qquad (k=0,1,\dots,n).$$

FOLIE

Zur Konstruktion der Treppenfkt setzen wir

$$\begin{aligned} \psi(t) &= f(t_{k-1}) \\ \varphi(t) &= f(t_k) \end{aligned} \qquad t_{k-1} \le t < t_k$$
$$\psi(b) := f(b) =: \varphi(b)$$

f mon wachsend $\Longrightarrow \psi \le f \le \varphi$

Außerdem gilt

$$0 \underset{1.6(iii)}{\le} \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b \psi(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \big(f(t_k) - f(t_{k-1})\big)$$

$$\overset{\text{Teleskops.}}{=} \frac{b-a}{n}\big(f(t_n) - f(t_0)\big) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

Also gilt $\forall \varepsilon > 0$, dass $0 \le \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b \psi(t)\,dt < \varepsilon$, falls nur n groß genug ist $\overset{1.11}{\Longrightarrow} f$ R-intbar. $\square$

1.14 MOTIVATION (Grundeigenschaften – zum Integral)

Nachdem wir nun den Integralbegriff auf eine größere Klasse von Fkt ausgedehnt haben, überzeugen wir uns davon, dass er auch vernünftig ist – in dem Sinn, dass die Grundeigenschaften aus 1.6 erhalten bleiben (vgl. 1.7). Dass diese von großem Nutzen sind, haben wir gerade auch im letzten Beweis gesehen, wo 1.6 essentiell an mehreren Stellen eingegangen ist.

1.15 PROP (Linearität & Monotonie des R-Integrals)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-intbar und sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

(i) $f+g$ ist R-intbar und $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$

(ii) λf ist R-intbar und $\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$

(iii) $f \leq g \implies \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

NICHT VORGETRAGEN

Beweis. (i) Sei $\varepsilon > 0$, dann wählen wir $\varphi_j, \psi_j \in J[a,b]$ $(i,j = 1,2)$ mit $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$, $\varphi_2 \leq g \leq \psi_2$ und $(1 \leq i,j \leq 2)$

$$0 \leq \int_a^b \psi_j - \int_a^b \varphi_j \leq \varepsilon/2 \quad [1.11].$$

Dann sind $\varphi_1 + \varphi_2,\ \psi_1 + \psi_2 \in J[a,b]$ [1.3(ii)] und es gilt

$$\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2 \qquad [1.6(ii),(iii)]$$

$$\int_a^b (\psi_1 + \psi_2)(t)\,dt - \int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2)(t)\,dt \leq \varepsilon$$

und somit ist $f+g$ R-intbar lt 1.11.

$(f+g)$ R-intb.

Außerdem gilt [1.8(ii)]

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_{a*}^b f + \int_{a*}^b g \leq \int_{a*}^b (f+g) = \int_a^b (f+g)$$

Seien φ_1, φ_2 wie im sup in 1.8(i) für f bzw g. Dann ist $\varphi_1+\varphi_2$ zulässige Fkt im sup für $f+g$.

$$= \int_a^{b*} (f+g) \leq \int_a^{b*} f + \int_a^{b*} g$$

analog f. inf

$$= \int_a^b f + \int_a^b g$$

NICHT VORGETRAGEN

und da der erste Ausdruck gleich dem letzten ist, gilt immer $=$ statt $\leq$ und wir erhalten

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g) .$$

(ii) ähnlich wie (i) [separat für $\lambda=0$, $\lambda>0$, $\lambda=-1$, $\lambda<0$]

(iii) Sofort klar aufgrund der Def $\left[\int^* f \leq \int^* g\right]$ $\square$

1.16 MOTIVATION (In Richtung Δ-Ungl für $\int$)

Unser nächstes Ziel ist es, die Δ-Ungleichung für Integrale – eine sehr wichtige Abschätzung –

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

herzuleiten. Wie schon der Name andeutet, kann sie als Verallgemeinerung der Δ-Ungl $|x+y| \leq |x|+|y|$ bzw der verallgemeinerten Δ-Ungl (vgl. Bew [R] 4.42)

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

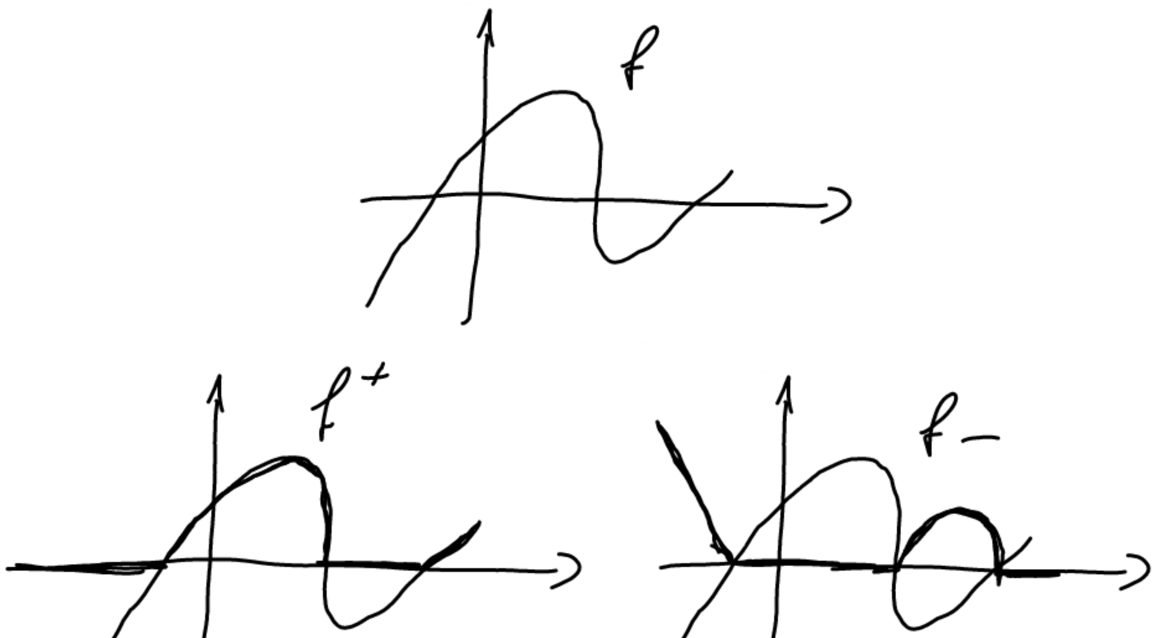
aufgefasst werden. Dazu benötigen wir folgende Begriffe – die auch unabhängig wichtig sind

1.17 DEF (positiver & negativer Teil einer Fkt)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$. Wir definieren positiven und negativen Teil von f als

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

1.18 BEM (zu f^+, f_- und $|f|$)

(i) Folgende Skizze illustriert Def 1.17:



(ii) Offensichtlich gilt

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_-(x) = -\min(f(x), 0),$$

$$f = f^+ - f_-, \quad |f| = f^+ + f_- \quad \text{und}$$

$$f \leq g \Rightarrow f^+ \leq g^+, \ g_- \leq f_- \qquad \text{[Details UE]}$$

1.19 PROP (Δ-Ungl für R-$\int$)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-intbar, dann sind auch f^+, f_- und $|f|$ R-intbar und es gilt

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Beweis • Wir beweisen zuerst die R-intbarkeit von f^+. Sei $\varepsilon>0$

$1.11 \Rightarrow \exists\, \varphi,\psi\in\mathcal{T}[a,b]$ mit $\psi\le f\le\varphi$ und

$$0\le\int\varphi-\int\psi\le\varepsilon$$

1.18(iii)

Nun sind φ^+ und $\psi^+\in\mathcal{T}[a,b]$ mit $\psi^+\le f^+\le\varphi^+$ und es gilt $\varphi^+-\varphi=\varphi_-\le\psi_-=\psi^+-\psi \Rightarrow \varphi^+-\psi^+\le\varphi-\psi \Rightarrow$

1.18(iii)

$$0\le\int\varphi^+-\psi^+\le\int\varphi-\psi\le\varepsilon$$

$$\overset{1.11}{\Longrightarrow} f^+ \text{ ist } R\text{-intbar}$$

- Die R-intbarkeit von f_- folgt analog
- $|f|$ ist R-intbar wegen $|f|=f^++f^-$ und 1.15(i)
- Schließlich gilt wegen $f\le|f|$, $-f\le|f|$ mit 1.15(iii) $\int f\le\int|f|$ und $-\int f\le\int|f|$ und somit

$$\left|\int f\right|\le\int|f|.$$

$\square$

1.20 KOR (Intbarkeit von Produkten)

Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-intbar. Dann gilt

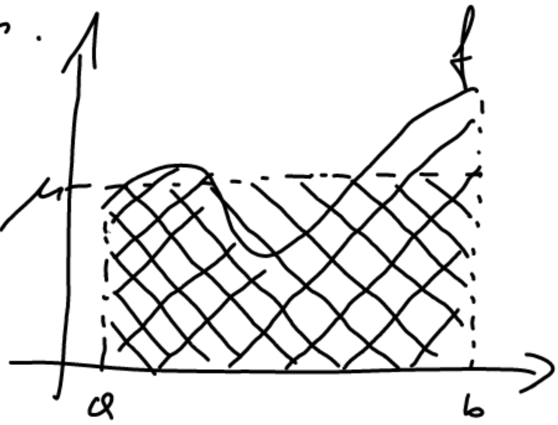
(i) $\forall p\in[1,\infty)$: $|f|^p$ ist R-intbar

(ii) $f\cdot g$ ist R-intbar

<u>Beweis</u>. siehe [Hö S. 11 Prop (ii), (iii)] □

1.21 MOTIVATION (MWS der Integralrechnung)

(i) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig & positiv. Dann ist f R-intbar [1.12(i)] und $\int_a^b f(t)\,dt$ entspricht der Fläche A unter dem Graphen. Anschaulich ist klar dass es ein Rechteck der Höhe μ über $[a,b]$ geben muß, das den gleichen Flächeninhalt hat, also $\mu(b-a)=A$ gilt.



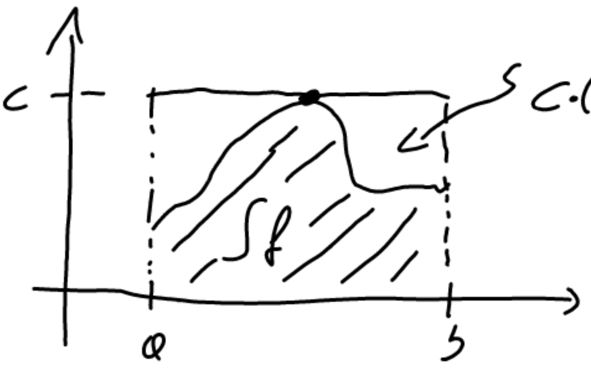
Dies ist tatsächlich der Fall, wie die nächste Prop zeigt. Zusätzlich besagt dieser MWS der Integralrechnung, dass es ein $\xi\in[a,b]$ gibt mit $f(\xi)=\mu$. Also zusammengefaßt:

$$\exists\, \xi\in[a,b]: \int_a^b f(t)\,dt = f(\xi)(b-a) \qquad (*)$$

(ii) Ähnlich wie der MWS der Differentialrechnung kann der MWS der Integralrechnung hervorragend dazu verwendet werden, um Abschätzungen herzuleiten [vgl. [B] 2.13]. Gilt z.B. $f(x)\le C \;\forall x\in[a,b]$, dann folgt sofort aus $(*)$,

$$\int_a^b f(t)\,dt \le C(b-a).$$

Diese Abschätzung lässt sich auch graphisch verstehen:



Die Fläche des Rechtecks über $[a,b]$ mit Höhe c ist sicher größer als $\int_a^b f(t)dt$.

(iii) Wir formulieren nun den MWS-Int exakt und beginnen mit einer etwas allgemeinen Version

1.22 PROP (MWS der Integralrechnung)

Seien $f,\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi\geq 0$. Dann gibt es ein $\xi\in[a,b]$ sodass

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt = f(\xi)\int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

Insbesondere ergibt sich mit $\varphi(t)=1\ \forall t\in[a,b]$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = f(\xi)(b-a)}$$

Beweis. (erfreulich kurz)

f stetig auf $[a,b]$ $\xRightarrow{[2]\,2.11}$ f beschränkt, d.h

$m:=\inf\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ und

$M:=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ existieren

$$\Longrightarrow m\leq f\leq M \overset{\varphi\geq 0}{\Longrightarrow} m\varphi\leq f\varphi\leq M\varphi$$

$$\overset{1.15(iii)}{\Longrightarrow} m\int_a^b\varphi\leq\int_a^b f\varphi\leq M\int_a^b\varphi$$

$$\Longrightarrow \exists \mu \in [m,M]: \int_a^b f\varphi = \mu \int_a^b \varphi$$

ZWS $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$, also

$$\int_a^b f\varphi = f(\xi) \int_a^b \varphi \, . \qquad \square$$

1.23 BEM (Teilintervalle & Orientierung)

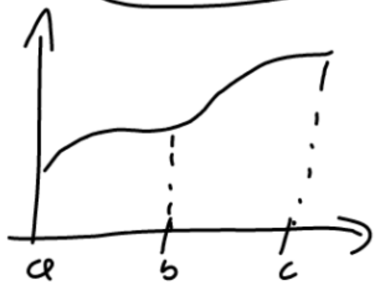
(i) Seien $a<b<c$ und $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Dann ergibt sich durch Zusammenfügen der entsprechenden Treppenfkt.

f ist R-intbar $\Longleftrightarrow$ $f|_{[a,b]}$ & $f|_{[b,c]}$ sind R-intbar

Einschränkung von f auf $[a,b]$ bzw $[b,c]$

In diesem Fall gilt

$$\boxed{\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.}$$



(ii) Wir treffen folgende Vereinbarung. Falls $b<a$, dann setzen wir

$$\int_a^b f(t)\,dt := -\int_b^a f(t)\,dt.$$

Das reflektiert die Idee, dass die x-Achse in Richtung größerer Werte von x orientiert ist.

(iii) Wir setzen $\int_a^a f(t)\,dt = 0$.

1.24 <u>BEM</u> (Riemannsummen)

In dieser Bemerkung diskutieren wir einen wichtigen alternativen Zugang zum R-Integral, der eine etwas einfachere Berechnung des R-Integrals erlaubt [die Methode Integrale zu berechnen folgt im nächsten §] und oft auch als Definition verwendet wird.

Wir beginnen mit einer (technischen) Definition

(i) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und sei $Z := \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$.
Wir wählen in jedem der Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ einen Punkt $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, genannt <u>Stützstelle</u>.

Teilungspunkte t_j $(0 \leq j \leq n)$ und Stützstellen ξ_j $(1 \leq j \leq n)$ fassen wir zusammen zu

[Fraktur Z] $\longrightarrow$ $$\mathfrak{Z} := \left((t_k)_{k=0}^{n}, (\xi_k)_{k=1}^{n} \right)$$

und definieren die Riemann-Summe von f bzgl $\mathfrak{Z}$ als

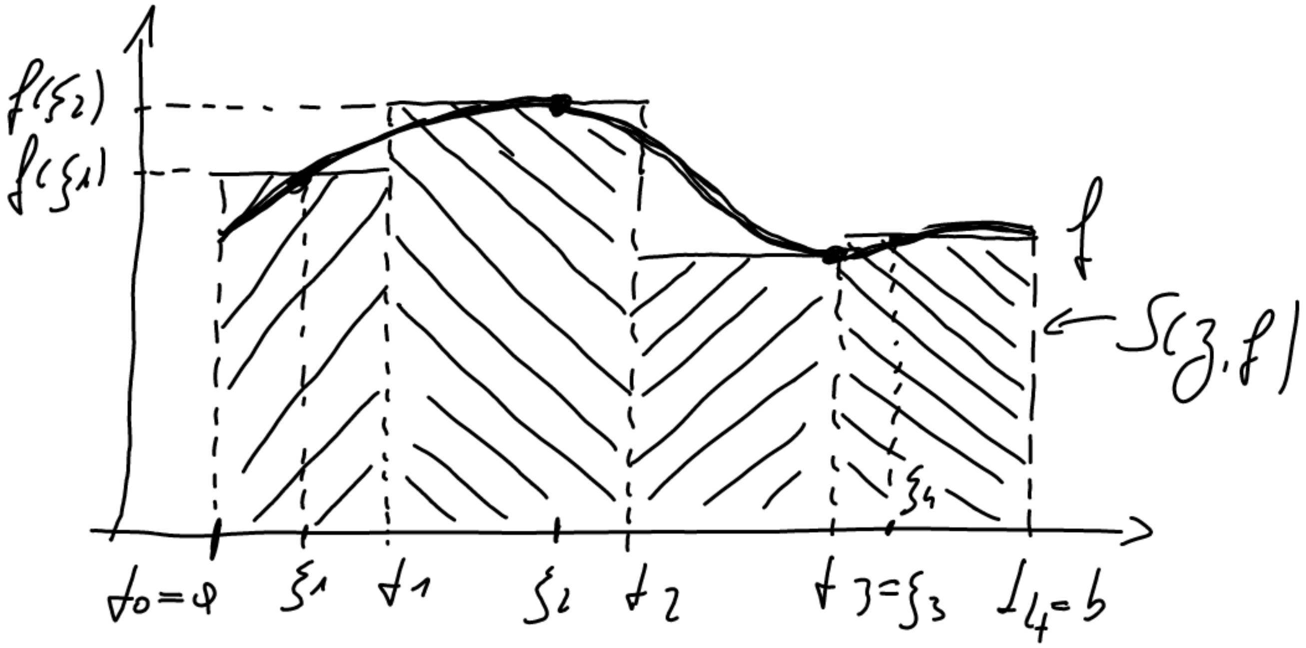
$$S(\mathfrak{Z}, f) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

Rechtecksflächen mit Breite = Abstand der resp. Teilungspkte und Höhe = f an der entspr. Stützstelle

Wir nennen $\mu(Z) = \max_{1\leq k\leq n} (t_k - t_{k-1})$ ← Länge des größten Teilintervalls

die Feinheit der Zerlegung Z

(ii) Wir können diese Def graphisch veranschaulichen:



Wir sehen, dass die R-Summe als Fläche unter dem Graphen einer Treppenfkt φ interpretiert werden kann, wobei

$$\varphi(t) = f(\xi_i) \quad t \in (t_{i-1}, t_i) \quad (i=1,2,\dots,n)$$

und daher genauer

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = R(Z,f)$$

φ interpoliert also f an den Stützstellen $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Riemanns ursprüngliche Idee war es nun, den Grenzwert von $R(Z,f)$ für $\mu(Z)\to 0$ zu betrachten, also für immer feinere Zerlegungen bessere Approximationen durch an den Stützstellen interpolierende

Treppenfkt zu konstruieren.

Dieser Zugang ist unserem eng verwandt. Lediglich die Bestimmung der approximierenden Treppenfkt ist etwas expliziter.

Da es im Limes $\mu(\mathcal{Z}) \to 0$ anschaulich die Wahl der Stützstellen irrelevant wird, ist es nicht überraschend, dass beide Zugänge äquivalent sind. Genau gilt

(iii) THM: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt

f ist R-intbar $\Longleftrightarrow$ $\exists s \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sodass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $\mu(\mathcal{Z}) < \delta$

$$|S(\mathcal{Z}, f) - s| < \varepsilon$$

Die R-Summen kommen s beliebig nahe, falls die Zerlegung nur fein genug ist.

In diesem Fall gilt $s = \int_a^b f(t)\,dt$

Beweis siehe [Hö, 9.13] □

(iv) BSP. Wir berechnen exemplarisch das Integral $\int_0^a t\,dt$ $(a>0)$ mittels R-Summen.

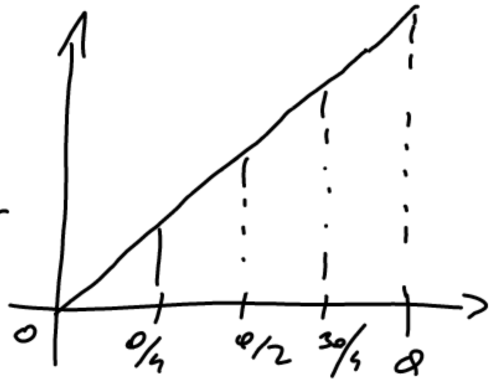
Sei $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Wir wählen als Zerlegungspkte $t_k := \frac{ka}{n}$ $(k=0,\dots,n)$ und Stützstellen $\xi_k = t_k$. Dann ist also

Das ist erlaubt, vgl. (i) & es ist einfach!

$$\mathcal{Z} = \left((t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n\right) = \left(\left(\frac{ka}{n}\right)_{k=0}^n, \left(\frac{ka}{n}\right)_{k=1}^n\right)$$

und $\mu(\mathcal{Z}) = \frac{a}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Also ergeben sich die R-Summen



$n = 4$

$$S_n = S(\mathcal{Z}, f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{ka}{n} \cdot \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \underline{\frac{a^2}{n^2} \, \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{a^2}{2}$$

und somit

$$\boxed{\int_0^a t \, dt = \frac{a^2}{2}}$$

Dieses Ergebnis sieht man natürlich auch elementargeometrisch; <u>richtig</u> Integrale berechnen lernen wir im nächsten §.

§2 Integral & Ableitung

2.1 Intro. Im vorigen § haben wir den Begriff des Riemann-Integrals kennen gelernt & diskutiert.
Eine drängende Frage ist es nun: Wie berechnet man konkret ein Integral über z.B. eine stetige Fkt?
↳ jenseits von R-Summen

Der Schlüssel dazu liegt in der Zusammenführung des Integralbegriffs mit dem Differenzieren. Dies wird ultimativ vom Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HsDI) erledigt, den wir gleich kennen lernen werden.
Wir beginnen mit formalen Vorbereitungen und dem Begriff der Stammfunktion.

2.2. Def (Stammfunktion) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f auf I, falls

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

2.3 Bsp (Stammfunktion)
$F(x) = x^2/2$ ist Stammfunktion von $f(x) = x$ auf $\mathbb{R}$, denn

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x = f(x).$$

2.4. MOTIVATION (2 Fragen zu Stammfkt.)

Zum Begriff der Stammfunktion ergeben sich unmittelbar & in natürlicher Weise die folgenden Fragen:

(1) Gibt es immer eine Stammfkt und wenn ja wieviele Stammfkt gibt es? ← genauer: Welche f's haben Stammfkt abseits von einfachen Bsp wie 2.3-2.3

(2) Wie kann man Stammfunktionen systematisch beschreiben/berechnen?

Wir beantworten den "Eindeutigkeitsteil" in (1) in der nächsten Prop und den Rest von (1) und (2) im nächsten Theorem, dem HSDI.

2.5 PROP (Differenz von Stammfkt)

Sei $F: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: I \to \mathbb{R}$. Für $G: I \to \mathbb{R}$ gilt

$$G \text{ ist (ebenfalls) Stammfkt von } f \iff F - G \text{ ist konstant}$$

Beweis. $\Rightarrow$ G ist Stammfkt von f $\Rightarrow$

$$G' = f = F' \Rightarrow (F-G)'(x) = 0 \ \forall x \in I \overset{[3]\, 2.14(ii)}{\Longrightarrow} F - G \text{ konst.}$$

$\Leftarrow$ Sei $G(x) = F(x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$ $\Rightarrow$ G diffbar [Baukasten] und es gilt $G' = (F+c)' = F' = f$. $\square$

2.6 MOTIVATION (zum Programm aus 2.4)

Prop 2.5 sagt uns, wie wir alle Stammfkt einer gegebenen Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ berechnen, falls wir eine einzige Stammfkt haben (nämlich durch Addieren einer Konstanten).

Wie wir eine solche Stammfkt erhalten, falls f stetig ist, sagt u.a. der

2.7 THM: (Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und seien $a, b \in I$ beliebig.

(i) Die Funktion $F: I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (*)$$

ist stetig differenzierbar ($F \in C^1(I)$) und $F' = f$. Insbesondere ist F eine Stammfunktion von f auf I.

(ii) Sei F eine (beliebige) Stammfunktion von f, dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Beweis: (Für so ein zentrales Resultat erfreulich einfach und direkt)

(i) f stetig $\Rightarrow$ f R-intbar und (∗) ist sinnvoll, daher F definiert.

Wir berechnen den Differenzenquot. von F in $x \in I$ beliebig. Sei $0 \neq h$ sodass $x+h \in I$ [oBdA $h>0$ sonst analog]. Dann gilt

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) \underset{1.24}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \quad (\Delta)$$

$$\xRightarrow{\text{MWS}\int} \exists\, \xi_h \in [x, x+h] \text{ mit } \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h)\,h \quad (\Delta\Delta)$$

Bemerke $\xi_h \to x$ falls $h \to 0$ $\left[\,|x-\xi_h| \leq |x-(x+h)| = |h| \to 0\,\right]$.

Daher erhalten wir

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{(\Delta),(\Delta\Delta)}{=} f(\xi_h) \xrightarrow{f \text{ stetig}} f(x).$$

Warum stimmt das auch intuitiv? $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \overset{(\Delta)}{=} \boxed{\,}/h \approx \boxed{\,}/h = f(x)$

Also gilt $F' = f$ und somit ist F' auch stetig.

(ii) Definiere G wie in (∗), also $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$\xRightarrow{(i)}$ G ist Stammfkt von f

Sei F beliebige Stammfkt von f $\xRightarrow{7.5}$ $F = G + c$ $(c \in \mathbb{R})$

Daher gilt

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f + \int_a^a f \underset{1.24(iii)}{=} \int_a^b f(t)\,dt.$$

$\square$

2.8 BEM (Die Bedeutung des HsDI)

(i) Für die Pkte (i) & (ii) im HsDI bieten sich die folgenden Schreibweisen an (Notation wie im Thm.):

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad \text{bzw.} \quad \int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

„Diff von Int = Id"

„Int von Diff = Id bis auf eine Konstante"

Spätestens jetzt wird klar, dass der HsDI besagt, dass Differenzieren und Integrieren im wesentlichen „inverse Operationen" sind!

(ii) Etwas präziser können wir die Situation wie folgt darstellen (Notation wie im Thm):

$$f \in \mathcal{C}^0(I) \xmapsto{\ \overset{\circ}{\text{INT}}\ } \Big(F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\Big) \xmapsto{\ \text{DIFF}\ } F' = f \qquad (*)$$

d.h. f stetig auf I $\Rightarrow$ integrierbar

diffb. wegen 2.7(i)

wegen 2.7(i)

bzw. beginnend mit dem Differenzieren

$$F \in \mathcal{C}^1(I) \xmapsto{\ \overset{\circ}{\text{DIFF}}\ } (F' \text{ R-intb.}) \xmapsto{\ \overset{\circ}{\text{INT}}\ } \int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a) \qquad (**)$$

d.h. F stetig diffb.

1.12(i)

wegen 2.7(ii)

(iii) Definieren wir die folgenden Abbildungen

Ableitungsoperator

$$D: \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}(I), \quad F \mapsto F'$$

Integraloperator

$$R: \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}^1(I), \quad f \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

R landet in $\mathcal{C}^1$ wegen 2.7(i)

können wir wie folgt formulieren

$$\boxed{D \circ R = \mathrm{id}: \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)}$$

wegen (*)

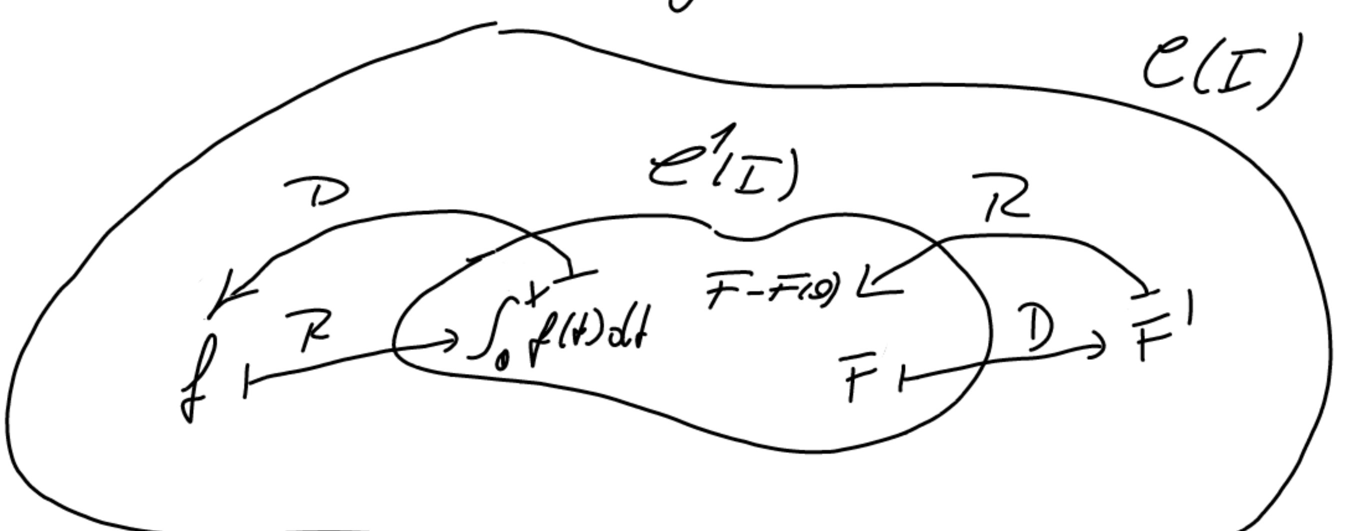
wegen (**)

$$R \circ D: \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^1(I) \text{ erfüllt } R \circ D(F) = F - F(a)$$

nur fast die Id

(iv) Neben der Tatsache, dass $R \circ D$ nicht ganz die Identität ergibt [$R \circ D = \mathrm{id} + \text{Konstante}$] haben D & R unterschiedliche Def- & Zielbereiche. Daher sind D & R eben doch nicht genau invers zueinander. – die Details des Slogans aus (i) sind essentiell.

Eine letzte Veranschaulichung der Situation ist:



2.9 Motivation (Konkretes Integrieren)

(i) Der HsDI und insbesondere Thm 2.7(ii), d.h.

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) =: F(t)\Big|_a^b$$

praktische Schreibweise

erlaubt es nun praktisch konkrete Integrale zu berechnen: Wir müssen nur die Differenz der Werte einer (beliebigen) Stammfunktion an der Ober- bzw. Untergrenze bilden

(ii) Wie erhalten wir eine Stammfunktion? Na durch unsere Ergebnisse aus [3] über das konkrete Differenzieren!

(iii) Als einfaches Bsp betrachten wir $\int_a^b x^n\,dx$ $(1 \le n \in \mathbb{N})$.
Wegen $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ [[3] 1.8(ii)] gilt

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b.$$

Bevor wir weitere einfache Bsp betrachten ein begründetes Pamphlet!

2.10 BEM (Terminologische Katastrophe: unbestimmtes Integral)

(i) In vielen Texten findet man die Kurzschreibweise
$F(x)=\int f(x)\,dx$ und meint damit eine oder auch alle Stammfkt von f. Der Ausdruck

$$\int f(x)\,dx \qquad (*)$$

FOLIE

wird dabei als „unbestimmtes Integral" bezeichnet.

(ii) Diese traditionell leider übliche Bezeichnung führt aber in eine echte <u>terminologische Katastrophe</u> ☹

Genauer betrachten wir die folgenden Bezeichnungen:

	BEI UNS	TRAD. ÜBLICH
$\int_a^b f(t)\,dt$	Integral von f zw a und b	bestimmtes Integral v. f
F mit $F'=f$	Stammfkt von f	unbestimmtes Integral v. f

Die hochgradig nichttriviale Aussage (ii) im HsDI, die das prakt. Integrieren erst ermöglicht, lautet „bei uns" (vgl. 2.9(ii))

Das Integral von f zw a und b ergibt sich als die Differenz der Werte einer Stammfkt v. f an Ober- bzw. Untergrenze

Die traditionelle Terminologie versteckt diese Aussage in der winzigen Vorsilbe eines Eigenschaftsworts:

Das bestimmte Integral von f ist gleich der Differenz der Werte eines unbestimmten Integrals von f an der Ober- bzw Untergrenze.

(iii) Wir vermeiden daher die Bezeichnung „Unbestimmtes Integral" und verwenden (*) ausschließlich im folgenden Sinn:

„bestimme $\int f(t)\,dt$" bedeutet „finde eine Stammfkt. v. f".

2.11 Bsp (Höchste Zeit: konkretes Integrieren)

(i) Wir verallgemeinern 2.9(iii) auf $-1 \neq s \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.
Wegen $(x^s)' = s x^{s-1}$ [[3] 1.29(ii)] gilt

$$\int_a^b x^s\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}\Big|_a^b \qquad (*)$$

Für $s \in \mathbb{N}$ gilt (*) sogar für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) Der Fall $s = -1$ in (i) führt auf $(a, b > 0)$

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log(x)\Big|_a^b \qquad [[3]\ 1.28(ii)]$$

(iii) $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$, $\int \sin(x)\,dx = \cos(x)$ [[3] 1.8(v)]

(iv) $\int e^x\,dx = e^x$ [[3] 1.8(iv)] {beachte 2.10(iii)!}

(v) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$ [[3] 1.29(iii)]

2.12 Motivation (Mehr Werkzeuge!)

Um auch kompliziertere Fkt integrieren zu können — deren Stammfunktion wir nicht so einfach mittels unserer Ergebnissen aus [3] „sehen" — lernen wir nun zwei wichtige „Integrationsmethoden" kennen: die partielle Integration und die Substitutionsregel. Sie sind die „Umkehrungen" der Produktregel bzw der Kettenregel der Differentialrechnung und können dementsprechend leicht aus der entsprechenden Regel und dem HsDI hergeleitet werden.

2.13 PROP (Partielle Integration) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = \big(f(x)g(x)\big)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Beweis. Wir setzen $F = fg$. Dann gilt $F' = f'g + fg'$ [13] 1.5(ii)] und daher wegen 2.7(ii)

$$\big(f(x)g(x)\big)\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = \int_a^b F'(t)\,dt = \int_a^b f'(t)g(t)\,dt + \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

$\square$

2.14 BSP (Partielle Integration)

(i) $$\int \underbrace{\sin(x)}_{f'}\underbrace{\cos(x)}_{g}\,dx = -\cos^2(x) - \int \cos(x)\sin(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \sin(x)\cos(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$$

(ii) $$\int \log(x)\,dx \overset{\text{TRICK}}{=} \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{\log(x)}_{g}\,dx = x\log(x) - \int x\cdot {}^1\!/\!_x\,dx$$

$$= x\log(x) - x$$

2.15 PROP (Substitutionsregel) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar mit $\varphi([a,b]) \subseteq I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

damit ist $f\circ\varphi$ definiert

2.16 BEM (Zur Substitutionsregel)

(i) Prop 2.15 merkt man sich am einfachsten mit folgendem Trick: Betrachte $x = \varphi(t)$ als „neue Variable" für f, also $f(x) = f(\varphi(t))$. Dann gibt die folgende „formale" Rechnung die richtige Transformation

Die auftretenden Symbole sind strenggenommen nicht definiert

$$(*) \qquad dx = \frac{dx}{dt}\,dt = \frac{d\varphi(t)}{dt}\,dt = \varphi'(t)\,dt.$$

Schließlich müssen noch die Integralgrenzen „mittransformiert" werden, d.h.: $a \mapsto \varphi(a)$, $b \mapsto \varphi(b)$.

So erhalten wir tatsächlich

$$\int_a^b \underbrace{f(\varphi(t))}_{=f(x)}\,\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{\overset{(*)}{=}dx} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

(ii) Die Formel in 2.15 kann in beide Richtungen verwendet werden:

- von rechts nach links, falls wir einen komplizierten Integranden $f(x)$ vorliegen haben und wir ein passendes φ finden können, sodass $(f\circ\varphi)\varphi'$ leicht zu integrieren ist.

- von links nach rechts: Ein zunächst häßlicher Integrand kann die Struktur $(f\circ\varphi)\varphi'$ haben (für passendes φ) und f kann leicht integrierbar sein.

2.17 Bsp (zur Substitutionsmethode)

(i)
$$\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x)\Big|_0^{\pi}$$

$$\begin{bmatrix} x=\varphi(t)=2t \\ dx/dt = 2 \end{bmatrix} \qquad = -\frac{1}{2}(-1-1) = \underline{\underline{1}}$$

[von links nach rechts]

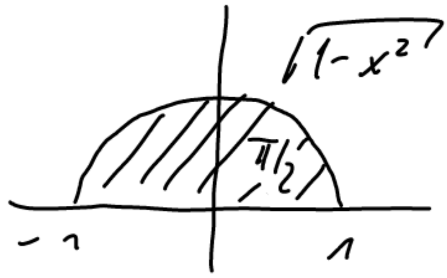
(ii) Etwas allgemeiner sei $c\neq 0$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig, $a<b\in\mathbb{R}$

$$\int_a^b f(ct)\,dt = \frac{1}{c}\int_a^b f(ct)\,c\,dt = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)\,dx$$

der besseren Sichtbarkeit wegen

$$\begin{bmatrix} \text{von links nach rechts} \\ x=\varphi(t)=ct \\ dx/dt = c \end{bmatrix}$$

(iii) Die Fläche des Halbkreises:



$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)\cos(t)\,dt$$

Idee: Verwende $\cos(t)=\sqrt{1-\sin^2(t)}$ von rechts nach links

$$\begin{bmatrix} x=\varphi(t)=\sin(t) \\ dx/dt = \cos(t) \\ -1\le x=\sin(t)\le 1 \\ \arcsin(-1)\le\arcsin(x)=t\le\arcsin(1) \\ = -\pi/2 \qquad \boxed{2}\ 3.29(ii) \qquad = \pi/2 \end{bmatrix}$$

daher:

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(2t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,dt$$

$\cos(2t)=2\cos^2(t)-1$ [$\boxed{2}$ 3.17(ii)]

$$\underset{c=2}{\overset{(ii),}{=}} \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t)dt + \frac{1}{2}t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4}\sin(t)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 1/4\Big(\underbrace{\sin(\pi)}_{0} - \underbrace{\sin(-\pi)}_{0}\Big) + \frac{1}{2}\left(\pi/2 + \pi/2\right) = \underline{\underline{\pi/2}}$$

NICHT VORGETRAGEN

<u>Beweis von 2.15:</u> Sei F eine Stammfkt von f.

$\Longrightarrow F\circ\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist diffbar

$$\overset{\boxed{3}\,1.23}{\Longrightarrow} (F\circ\varphi)' = F'\circ\varphi\cdot\varphi' = f\circ\varphi\cdot\varphi'$$

$$\overset{2.7(ii)}{\Longrightarrow} \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = (F\circ\varphi)\Big|_a^b$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

$\Box$

§4 Uneigentliche Integrale

4.1 Intro: Der bisher entwickelte Integralbegriff ist für viele Anwendungen zu eng gefaßt. Seine beiden „Schönheitsfehler" sind:

- Wir haben nur über kompakte Intervalle integriert.
- R-intbare Fkt sind notwendigerweise beschränkt.

Um Funktionen auch über unbeschränkte Intervalle zu integrieren und unbeschränkte Funktionen zu integrieren lernen wir nun die sog. uneigentlichen Integrale kennen. Diese werden wir unter geeigneten Bedingungen als Grenzwerte von Riemann-Integralen definieren. Wir betrachten 3 Fälle.

4.2 Def (Uneig. $\int$, Fall 1: Eine unendliche Intervallgrenze)
Sei $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Fkt mit der Eigenschaft

f ist R-intbar auf jedem Intervall $[a,R]$ mit $a < R < \infty$.

Falls $\lim\limits_{R\to\infty} \int_a^R f(t)\,dt$ existiert und endlich ist, so heißt das Integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergent $\left[\int_a^\infty f < \infty\right]$ und wir setzen

Limes der Fkt $R \mapsto \int_a^R f$

$$\boxed{\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(t)\,dt}$$

Analog für $f: (-\infty,b] \to \mathbb{R}$.

4.3 BSP (Uneig $\int$, Fall 1)

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$ für $s>1$.

Tatsächlich gilt $1/x^s$ ist stetig und daher R-intbar auf jedem Intervall $[1,R]$ und

$$\int_1^R \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}}\Big|_1^R = \frac{1}{s-1}\Big(1 - \underbrace{\frac{1}{R^{s-1}}}_{\to 0 \text{ da } s>1}\Big) \quad (*)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{s-1} \quad (R \to \infty)$$

(ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ divergiert für $s \le 1$, denn

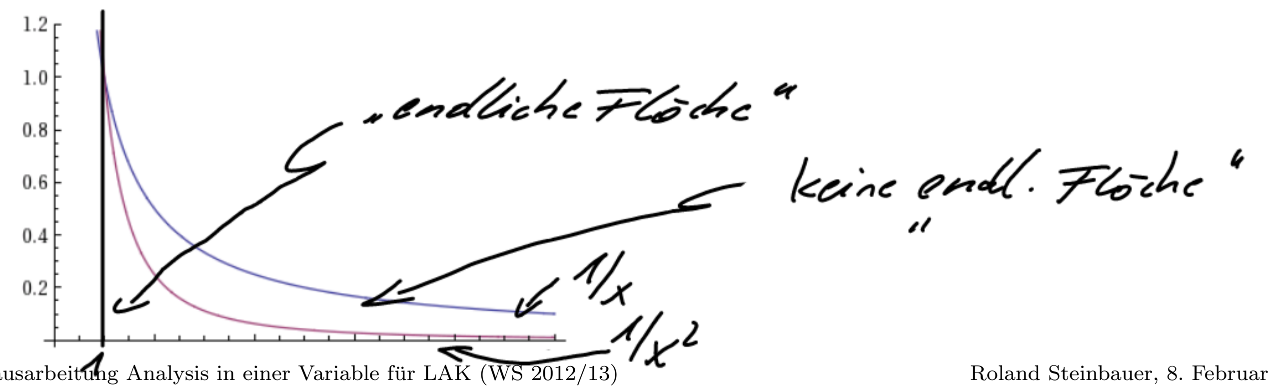
für $s \neq 1$ können wir die Rechnung in $(*)$ verwenden und sehen $\displaystyle\frac{1}{s-1}\Big(1 - \frac{1}{R^{s-1}}\Big) \to \infty$.

Für $s=1$ gilt

$$\int_1^R \frac{dx}{x} = \log(x)\Big|_1^R = \log(R) \xrightarrow{[B]\ 3.8(iv)} \infty \quad (R \to \infty).$$

(iii) Insgesamt gilt also

$$\boxed{\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \text{ konvergiert} \iff s>1}$$



4.4 DEF (Uneig. $\int$, Fall 2: Integrand an einer Integrationsgrenze unbeschr. / undefiniert)

Sei $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit d. Eigenschaft

f ist R-int.bar auf jedem Intervall $[a+\varepsilon, b]$ $(\varepsilon>0)$

Falls $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(t)dt$ existiert und endl. ist, so heißt das Integral $\int_a^b f(t)dt$ konvergent $[\int_0^b f<\infty]$ und wir setzen

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(t)dt}$$

Analog für $f:[a,b)\to\mathbb{R}$.

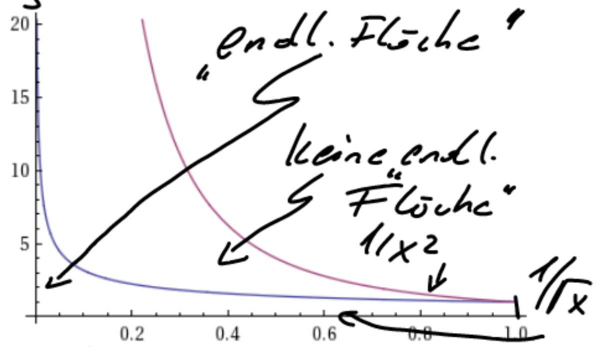
4.5 BSP (Uneig. Integral, Fall 2)

Es gilt $\boxed{\int_0^1\frac{dx}{x^s}\text{ konvergiert}\iff s<1.}$

[$1/x^s$ ist undefiniert in $x=0$ falls $s>0$]

Tatsächlich gilt für $s\neq 1$ und $1>\varepsilon>0$

$$\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x^s}=\frac{1}{1-s}\,x^{1-s}\Big|_\varepsilon^1=\frac{1-\varepsilon^{1-s}}{1-s}$$



$$\xrightarrow{(\varepsilon\to 0)}\begin{cases}\frac{1}{1-s} & s<1\\ \infty & s>1\end{cases}$$

Falls $s=1$ und $1>\varepsilon>0$, dann gilt

$$\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\log(x)\Big|_\varepsilon^1=-\log(\varepsilon)\xrightarrow{[3]\,3.8(ii)}\infty\ (\varepsilon\to 0)$$

4.6 DEF (Uneig.-$\int$, Fall 3: kombinierter Fall – beide Integrationsgrenzen kritisch)

Sei $-\infty \le a < b \le \infty$ und $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ eine Fkt m.d. Eig

f $\mathcal{R}$-intbar auf jedem Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $a < \alpha < \beta < b$.

Falls für ein beliebiges $c \in (a,b)$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(t)\,dt$ und $\int_c^b f(t)\,dt$ konvergieren, so heißt das Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ konvergent $\left[\int_a^b f < \infty\right]$ und wir setzen

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Diese Def ist unabhängig von der Wahl von c – ohne Beweis

4.7 BSP (Uneig. Int., Fall 3)

(i) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^s}$ divergiert $\forall s \in \mathbb{R}$

Tatsächlich setze $c = 1$, dann gilt

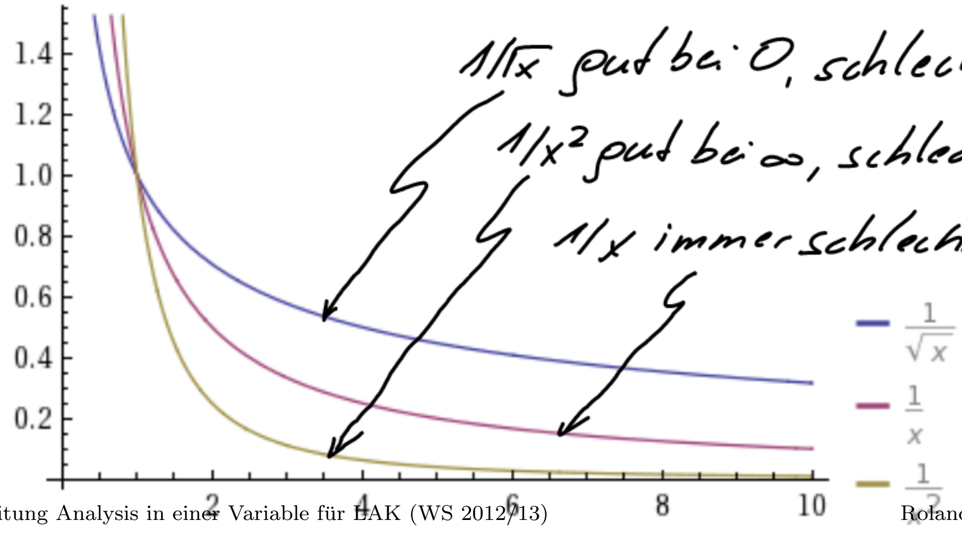
4.3 $\Rightarrow$ $\int_1^\infty 1/x^s\,dx$ div $\forall s \le 1$

4.5 $\Rightarrow$ $\int_0^1 1/x^s\,dx$ div $\forall s \ge 1$

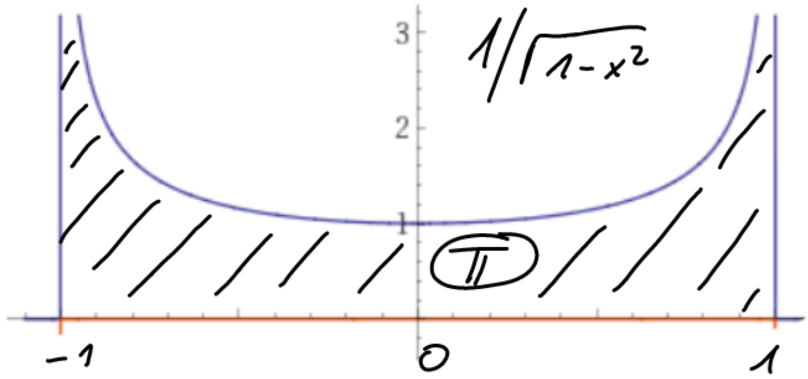
$1/\sqrt{x}$ gut bei 0, schlecht bei ∞

$1/x^2$ gut bei ∞, schlecht bei 0

$1/x$ immer schlecht



(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi,$



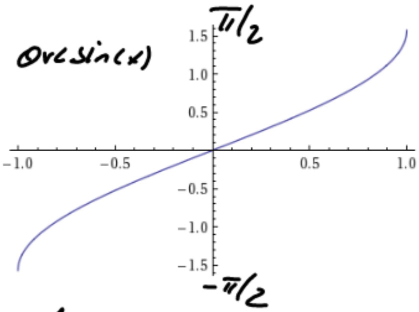
denn es gilt

$$\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arcsin(-1+\varepsilon)\quad \boxed{3}\ 1.28(iii)$$

$$\to -\arcsin(-1)=\pi/2\quad(\varepsilon\to 0)$$

$$\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin(1-\varepsilon)$$

$$\to \arcsin(1)=\pi/2\quad(\varepsilon\to 0)$$

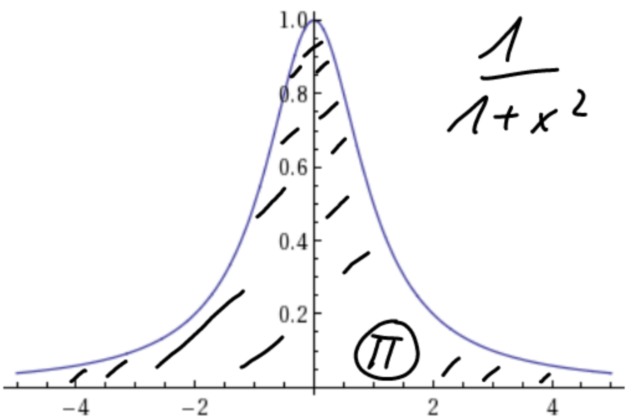


Daher gilt

$$\underline{\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi/2+\pi/2=\underline{\underline{\pi}}$$

NICHT VORGETRAGEN

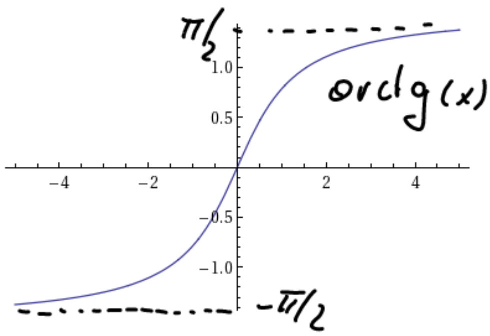
(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$



Sei $R>0$, dann gilt

$$\int_{-R}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=-\arctan(-R)\to\pi/2\quad(R\to\infty)\quad \boxed{3}\ 1.28(iv)$$

$$\int_{0}^{R}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan(R)\to\pi/2\quad(R\to\infty)$$



und daher

$$\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\pi/2+\pi/2=\underline{\underline{\pi}}$$

4.8 MOTIVATION (Konvergenztests für uneig. Int.)

Ganz ähnlich zu den Konvergenztests für Reihen [[2] §5] lassen sich Konvergenztests für uneig. Integrale formulieren, die es einem ersparen, die oft umständlichen Integrale, die in den Defs gefragt sind zu berechnen.

Wir formulieren die Tests nur für den Fall 1. Eine Anpassung an die Fälle 2 & 3 ist reine Routinearbeit, die wir hier unterlassen.

4.9 PROP (Konvergenztests f. uneig. Int.)

Sei $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ wie in Def 4.2, d.h. f R-intbar für jedes Intervall $[a,R]$ mit $a<R<\infty$. Dann gilt:

(i) Cauchy-Prinzip:

$$\int_a^\infty f(t)\,dt \text{ konvergiert} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists R>a: \forall r,s>R \quad \left|\int_r^s f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

(ii) Majorantenkriterium: Sei $h: [a,\infty)\to\mathbb{R}$, $h\geq 0$ und $\int_a^\infty h(t)\,dt$ konvergent. Falls

$$|f(x)| \leq h(x) \ \forall x>a \implies \int_a^\infty f(t)\,dt \text{ konvergiert}$$

(iii) Minorantenkrit.: Sei $g: [a,\infty)\to\mathbb{R}$, $g\geq 0$ und $\int_a^\infty g(t)\,dt$ divergent. Falls

$$f(x) \geq g(x) \ \forall x>a \implies \int_a^\infty f(t)\,dt \text{ divergiert.}$$

Beweis. (i) „$\Leftarrow$“: Sei (R_n) eine Folge mit $R_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.
Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $R > 0$ wie in der Bedingung.

$$\Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N}: R_n > R \quad \forall n \geq N$$

$$a_n = \int_a^{R_n} f$$

$$|a_n - a_m| = \left|\int_a^{R_n} f - \int_a^{R_m} f\right| = \left|\int_{R_m}^{R_n} f\right|$$

$$\overset{\text{Voraus.}}{\Longrightarrow} \left|\int_{R_m}^{R_n} f(x)\,dx\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$$

$$\overset{\boxed{1}\,3.16}{\Longrightarrow} \left(\int_a^{R_n} f(t)\,dt\right)_n \text{ ist eine Cauchy-Folge}$$

$$\overset{\boxed{1}\,3.18}{\Longrightarrow} \left(\int_a^{R_n} f(t)\,dt\right)_n \text{ konvergiert} \overset{\boxed{3}\,1.4}{\Longrightarrow} \lim_{R \to \infty} \int_a^{R} f(t)\,dt \;\exists$$

(i) „$\Rightarrow$“: Indirekt angenommen $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergiert, aber die Bedingung auf der rechten Seite ist verletzt, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \;\forall n \in \mathbb{N} \;\exists r_n, s_n > n: \left|\int_{r_n}^{s_n} f(t)\,dt\right| \geq \varepsilon \qquad (*)$$

Nun gilt aber $r_n \to \infty$, $s_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ und wir definieren eine neue Folge R_n durch Mischung von r_n & s_n, d.h.

$$\left.\begin{aligned} R_{2k} &= r_k \\ R_{2k+1} &= s_k \end{aligned}\right. \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt $R_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ und weil $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konv.

$$\overset{\boxed{3}\,1.4}{\Longrightarrow} \left(\int_a^{R_m} f(t)\,dt\right)_m \text{ konvergiert}$$

$$\overset{\boxed{1}\,3.18}{\Longrightarrow} \left(\int_a^{R_m} f(t)\,dt\right)_m \text{ ist Cauchy-Folge}$$

$$\Longrightarrow \lightning \text{ zu } (*)$$

(ii) Folgt aus (i): Sei $\varepsilon>0$ und R wie in (i) für h und $r,s>R$. Dann gilt:

$$\left|\int_r^s f(t)\,dt\right| \underset{\Delta\text{-Ugl}}{\le} \int_r^s |f(t)|\,dt \overset{1.15}{\le} \int_r^s h(t)\,dt < \varepsilon$$

(i) für $h \Rightarrow$ (i) für g

$\overset{(i)}{\Longrightarrow} \int_a^\infty f < \infty$

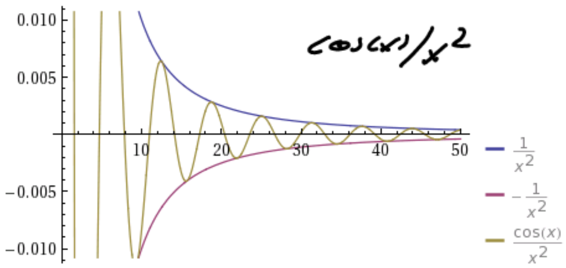
(iii) Folgt sofort aus (ii): Indir. ang. $\int_a^\infty f < \infty$

$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \int_a^\infty g < \infty$ ↯ zur Voraussetzung. $\square$

4.10 Bsp (Konvergenztests)

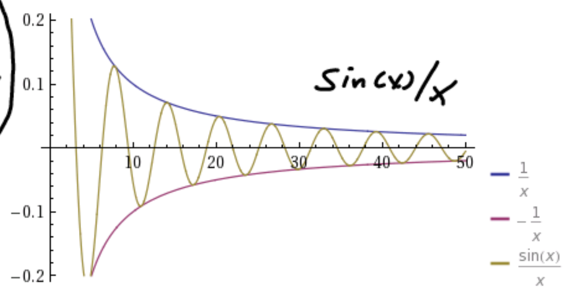
(i) $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$ konvergiert wegen 4.8(ii):

$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le 1/x^2$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konv (4.3(ii))



Majoranten-Krit. funktioniert hier nicht so wie oben?

(ii) $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ konvergiert



Wir wenden das Cauchy-Prinzip an: Seien $1<r<s$ dann gilt

$$\left|\int_r^s \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \overset{P.I.}{=} \left|-\frac{\cos(x)}{x}\Big|_r^s - \int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\right|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ugl}}{\le} \left|\frac{\cos(r)}{r} - \frac{\cos(s)}{s}\right| + \left|\int_r^s \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\right|$$

$$\le \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right) + \int_r^s \frac{dx}{x^2}$$

und dieser Ausdruck wird beliebig klein für r,s groß [$\frac{1}{r},\frac{1}{s}\to 0$ und $\left|\int_r^s 1/x^2\right| < \varepsilon$ lt. Cauchy-Prinzip]

Bemerkung: Wir sind hier hart an der Grenze des Möglichen, denn $\int_1^\infty dx/x$ divergiert und auch $\int_1^\infty |\sin(x)|/x\,dx$!

4.11 Motivation (Integraltest für Reihen)

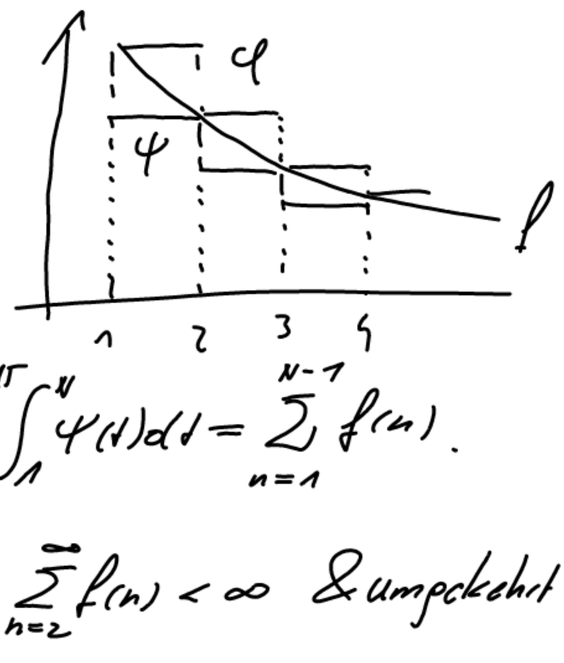
Die Analogie zwischen Konvergenztests für uneig. Int. und Reihen erlaubt eine Verbindung zwischen den beiden herzustellen, den sog. Integraltest f. Reihen (der die anderen Tests aus [2] §4 ergänzt)

4.12 Prop (Integraltest für Reihen)

Sei $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ eine mon. fallende Fkt. Dann gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(t)\,dt \text{ konvergiert}$$

Beweis. Wir definieren Treppenfkt $\varphi, \psi : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &:= f(n) \\ \psi(x) &:= f(n+1) \end{aligned}\right\} \quad (n \le x < n+1)$$



f mon. fallend $\Rightarrow \psi \le f \le \varphi$

Integration über $[1,N]$ liefert

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) = \int_1^N \varphi(t)\,dt \overset{1.15}{\le} \int_1^N f(t)\,dt \overset{1.15}{\le} \int_1^N \psi(t)\,dt = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Daher

$$\int_1^{\infty} f < \infty \Rightarrow S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) \text{ beschränkt} \overset{[1]\,4.6}{\Longrightarrow} \sum_{n=2}^{\infty} f(n) < \infty \quad \text{\& umgekehrt}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \Rightarrow \forall \text{ mon. wachs. Folgen } R_n \text{ mit } R_n \to \infty\ (n \to \infty) \text{ gilt}$$
$$\left(\int_1^{R_n} f(t)\,dt\right)_n \text{ mon. wachs. \& beschr} \overset{[1]\,3.25}{\Rightarrow} \text{konv} \Rightarrow \int_1^{\infty} f < \infty \qquad \square$$

NUR BEWEISIDEE VORGETRAGEN

4.13 Bsp ($\sum \frac{1}{n^s}$ zum Zweiten; vgl. [1] 4.8) Für $s > 0$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konv} \overset{4.12}{\iff} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \text{ konv} \overset{4.3(iii)}{\iff} s > 1$$