NICHT VORGETRAGEN

(iii) Wie zwingend ist diese Vorgehensweise?

Sie ergibt sich zwangsläufig, falls

(1) das neue Integral für Treppenfkt mit dem Integral 1.4 übereinstimmen soll, und

(2) $f \le g \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b g(t)\,dt$ gelten soll.

Denn für alle $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$, $f \le \varphi$ gilt dann $\int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b \varphi(t)\,dt$ also $\int_a^b f(t)\,dt \le \alpha$ und für alle $\psi \in \mathcal{T}[a,b]$, $\psi \le f$ gilt $\int_a^b \psi(t)\,dt \le \int_a^b f(t)\,dt$, also $\beta \le \int_a^b \psi(t)\,dt$.

Insgesamt also

$$\beta \le \int_a^b f(t)\,dt \le \alpha$$

und falls $\alpha = \beta$ ergibt sich zwangsläufig $\int_a^b f(t)\,dt = \alpha = \beta$.

Nun offiziell:

**1.8. DEF** (Riemann-Integral) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

(i) Wir definieren das Ober- bzw Unterintegral von $f$ als

$$\int_a^{b*} f(t)\,dt := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(t)\,dt \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{T}[a,b],\ f \le \varphi \right\} \text{ bzw.}$$

$$\int_{a*}^{b} f(t)\,dt := \sup \left\{ \int_a^b \psi(t)\,dt \,\middle|\, \psi \in \mathcal{T}[a,b],\ \psi \le f \right\}.$$

(ii) Wir nennen $f$ Riemann-integrierbar, falls

$\int_a^{b*} f(t)\,dt = \int_{a*}^{b} f(t)\,dt$. In diesem Fall definieren wir das Riemann-Integral von $f$ von $a$ nach $b$ als

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^{b*} f(t)\,dt$$

**1.9 BSP** (R-intbare & nicht R-intbare Fkt.)

(i) Treppenfkt. Wie erwartet (& gewünscht) sind Treppenfkt R-intbar und das R-Integral stimmt mit dem Integral 1.4 überein.

Sonst hätten wir 2 unterschiedliche $\int$ für $\mathcal{T}$, & das wäre Quatsch!

Tatsächlich für $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$ gilt

$$\int_a^{b*} \varphi(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_{a*}^b \varphi(t)\,dt$$

Integral 1.4

$$\Longrightarrow \varphi \text{ R-intbar } \& \text{ R-}\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

(ii) Die Dirichletfkt $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist nicht R-intbar.

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$ ist beschränkt auf $\mathbb{R}$ also auch auf jedem $[a,b]$. Allerdings enthält jedes offene Intervall rationale und irrationale Zahlen [[9] 1.11(ii)] daher gilt

$\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$, $\chi_{\mathbb{Q}} \leq \varphi \Longrightarrow \varphi \geq 1$ auf jedem Teilintervall einer Zerlegung

$\psi \in \mathcal{T}[a,b]$, $\psi \leq \chi_{\mathbb{Q}} \Longrightarrow \psi \leq 0$ — " —

$$\Longrightarrow \int_a^{b*} \chi_{\mathbb{Q}}(t)\,dt = 1 \neq 0 = \int_{a*}^b \chi_{\mathbb{Q}}(t)\,dt$$

**1.10 MOTIVATION** (Integrabilitätskriterium)

Auch bei genauer Betrachtung erweist sich die Def der R-Intbarkeit als sperrig und schwer handhabbar. Abhilfe schafft das folgende Integrabilitätskriterium, dass besagt dass ein beschränktes $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ genau dann R-intbar ist, falls es zwischen 2 Treppenfunktionen $\varphi,\psi$ „eingezwickt" werden kann $[\varphi\le f\le\psi]$ deren Integrale beliebig nahe beieinander liegen.

Diese Charakterisierung ist nur eine milde Umformulierung der Def und ebenfalls etwas technisch. Sie wird es uns aber ermöglichen ganze Klassen von Fkt, nämlich stetige Fkt & monotone Fkt als intbar zu entlarven.

**1.11 THM** (Integrabilitätskriterium: Einzwicken zw Treppenfkt)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt

$$f \text{ ist R-intbar} \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\varphi,\psi\in T[a,b] \text{ mit } \varphi\le f\le\psi \text{ und } 0\le\int_a^b\psi(t)\,dt-\int_a^b\varphi(t)\,dt\le\varepsilon$$

klar wegen Monotonie 1.6(iii)

**Beweis.** Die Aussage folgt unmittelbar aus der Def der R-intbarkeit & den Eigenschaften von inf & sup. (evVE) □

**1.12 KOR** (stetige Fkt & mon Fkt sind R-intbar)

(i) Jedes stetige $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist R-intbar

(ii) Jedes monotone $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist R-intbar

Zum Beweis von (i) benötigen wir ein Resultat, dass vieles von dem verwendet, was wir über stetige Fkt auf kompakten Intervallen wissen [vgl. [2] 2.1].

**1.13 SATZ** (Approximation stetiger Fkt durch Treppenfkt)

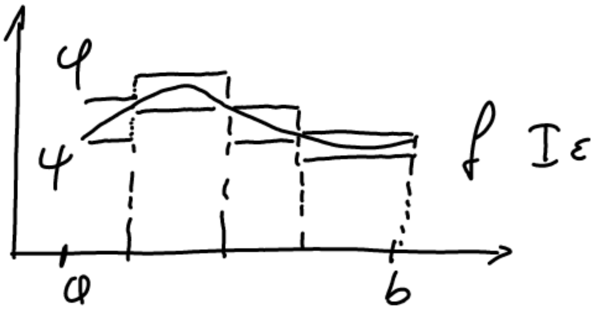
Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$\forall\varepsilon>0\ \exists\varphi,\psi\in\mathcal{T}[a,b]$ mit den Eigenschaften

(a) $\psi\le f\le\varphi$

(b) $|\varphi(x)-\psi(x)|\le\varepsilon\quad\forall x\in[a,b]$

Beweis. Sei $\varepsilon>0$.




(1) $f$ ist glm stetig [[2] Thm 2.16]

$\overset{[2]\,2.14}{\Longrightarrow}\ \exists\delta>0$ sodass

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon\quad\forall x,x'\in[a,b] \text{ mit } |x-x'|<\delta\quad(*)$$

FOLIE

(2) (Konstruktion von $\varphi,\psi$)

Sei $n$ so groß, dass $\frac{b-a}{n}<\delta$. $(**)$

Wir definieren eine (äquidistante) Zerlegung von $[a,b]$ via

$$t_k:=a+k\,\frac{b-a}{n}\qquad(k=0,\dots,n)$$

Es gilt dann $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$, $|t_k-t_{k+1}|\overset{(**)}{<}\delta$ $(***)$

Die Funktionswerte der Treppenfunktionen definieren wir wie ($1 \le k \le n$)

$$c_k := \sup\{ f(x) \mid t_{k-1} \le x \le t_k \}$$
$$c_k' := \inf\{ f(x) \mid t_{k-1} \le x \le t_k \}. \qquad (\Delta)$$

Wir setzen $\varphi(a) := f(a) =: \psi(a)$ und ($1 \le k \le n$)

FOLIE

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(t) &:= c_k \quad && t_{k-1} < t \le t_k \\ \psi(t) &:= c_k' \quad && t_{k-1} < t \le t_k \end{aligned}}$$

(3) Nun gelten (a) noch Konstruktion (vgl. ($\Delta$)) und (b), denn

(2) Thm 2.11 $\Longrightarrow \exists\, \xi_k, \xi_k' \in [t_{k-1}, t_k]$ ($1 \le k \le n$):

$$f(\xi_k) = c_k, \quad f(\xi_k') = c_k'$$

$$\overset{(***)}{\Longrightarrow} |\xi_k - \xi_k'| < \delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} |c_k - c_k'| < \varepsilon.$$

$\square$

Beweis von 1.12:

(i) Sei $\varepsilon > 0$. $\overset{1.13}{\Longrightarrow} \exists\, \varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ mit $\psi \le f \le \varphi$ und $|\varphi(x) - \psi(x)| \le \varepsilon / (b-a)$ $(*)$

Daher gilt

$$\underset{1.6(iii)}{0 \le} \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b \psi(t)\,dt$$

Zerlegung $a = t_0 < t_1 = b$

$$\underset{1.6(i),(ii)}{=} \int_a^b (\varphi(t) - \psi(t)) \underset{1.6(iii)}{\overset{(*)}{\le}} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

$\overset{1.11}{\Longrightarrow} f$ ist R-intbar

(ii) Wir beweisen nur den Fall $f$ mon. wachsend (der fallende Fall ist analog).

Wir konstruieren (wie in Bew 1.13, Schritt (2)) eine (äquidistante) Zerlegung von $[a,b]$ via

$$t_k = a + k\,\frac{b-a}{n} \qquad (k=0,1,\dots,n).$$

Zur Konstruktion der Treppenfkt setzen wir

$$\begin{aligned} \psi(t) &= f(t_{k-1}) \\ \varphi(t) &= f(t_k) \end{aligned} \qquad t_{k-1} \le t < t_k$$
$$\psi(b) := f(b) =: \varphi(b)$$

FOLIE

$f$ mon wachsend $\Longrightarrow \psi \le f \le \varphi$

Außerdem gilt

$$0 \underset{1.6(iii)}{\le} \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b \psi(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \big(f(t_k) - f(t_{k-1})\big)$$

$$\overset{\text{Teleskops.}}{=} \frac{b-a}{n}\big(f(t_n) - f(t_0)\big) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

Also gilt $\forall \varepsilon > 0$, dass $0 \le \int_a^b \varphi(t)\,dt - \int_a^b \psi(t)\,dt < \varepsilon$, falls nur $n$ groß genug ist $\overset{1.11}{\Longrightarrow}$ $f$ R-intbar. $\square$

## 1.14 Motivation (Grundeigenschaften – zum Zweiten)

Nachdem wir nun den Integralbegriff auf eine größere Klasse von Fkt ausgedehnt haben, überzeugen wir uns davon, dass er auch vernünftig ist – in dem Sinn, dass die Grundeigenschaften aus 1.6 erhalten bleiben (vgl. 1.7). Dass diese von großem Nutzen sind, haben wir gerade auch im letzten Beweis gesehen, wo 1.6 essentiell an mehreren Stellen eingegangen ist.

## 1.15 Prop (Linearität & Monotonie des R-Integrals)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-intbar und sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

(i) $f+g$ ist R-intbar und $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$

(ii) $\lambda f$ ist R-intbar und $\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt$

(iii) $f \leq g \implies \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

NICHT VORGETRAGEN

Beweis. (i) Sei $\varepsilon > 0$, dann wählen wir $\varphi_j, \psi_j \in J[a,b]$ $(i,j = 1,2)$ mit $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$, $\varphi_2 \leq g \leq \psi_2$ und $(1 \leq i,j \leq 2)$

$$0 \leq \int_a^b \psi_j - \int_a^b \varphi_j \leq \varepsilon/2 \quad [1.11].$$

Dann sind $\varphi_1+\varphi_2,\ \psi_1+\psi_2 \in J[a,b]$ [1.3(ii)] und es gilt

$$\varphi_1+\varphi_2 \leq f+g \leq \psi_1+\psi_2$$

$$\int_a^b (\psi_1+\psi_2)(t)\,dt - \int_a^b (\varphi_1+\varphi_2)(t)\,dt \leq \varepsilon \quad [1.6(ii),(iii)]$$

und somit ist $f+g$ R-intbar lt 1.11. $(f+g)$ R-intb.

Außerdem gilt [1.8(ii)]

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_{a*}^b f + \int_{a*}^b g \le \int_{a*}^b (f+g) = \int_a^b (f+g)$$

$$= \int_a^{b*} (f+g) \le \int_a^{b*} f + \int_a^{b*} g$$

$$= \int_a^b f + \int_a^b g$$

Seien $\varphi_1, \varphi_2$ wie im sup in 1.8(i) für $f$ bzw $g$. Dann ist $\varphi_1+\varphi_2$ zulässige Fkt im sup für $f+g$.

analog f. inf

NICHT VORGETRAGEN

und da der erste Ausdruck gleich dem letzten ist, gilt immer $=$ statt $\le$ und wir erhalten

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g) .$$

(ii) ähnlich wie (i) [separat für $\lambda=0, \lambda>0, \lambda=-1, \lambda<0$]

(iii) Sofort klar aufgrund der Def $\left[\int^* f \le \int^* g\right]$ $\square$

**1.16 MOTIVATION** (In Richtung $\Delta$-Ungl für $\int$)

Unser nächstes Ziel ist es, die $\Delta$-Ungleichung für Integrale — eine sehr wichtige Abschätzung —

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$$

herzuleiten. Wie schon der Name andeutet, kann sie als Verallgemeinerung der $\Delta$-Ungl $|x+y| \le |x|+|y|$ bzw der verallgemeinerten $\Delta$-Ungl (vgl. Bew [R] 4.42)

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

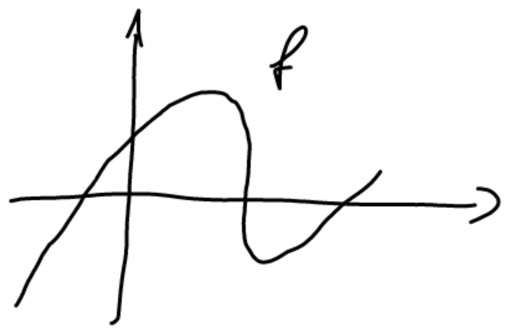
aufgefasst werden. Dazu benötigen wir folgende Begriffe – die auch unabhängig wichtig sind

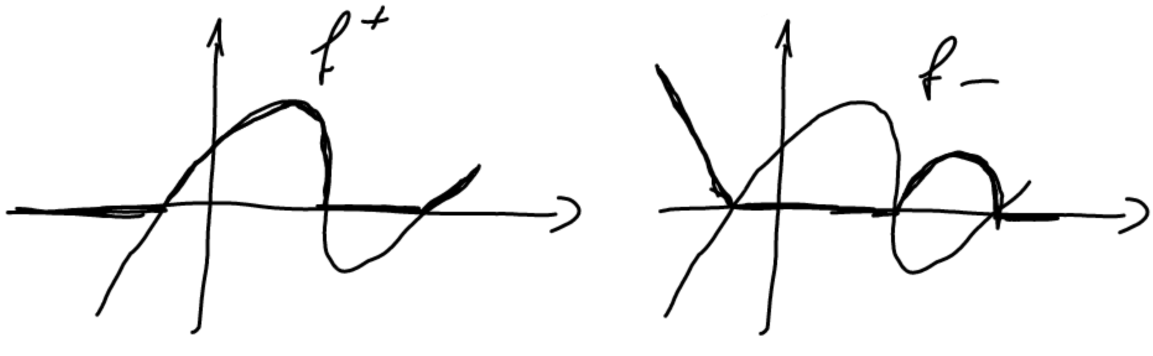
**1.17 DEF** (positiver & negativer Teil einer Fkt)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$. Wir definieren positiven und negativen Teil von $f$ als

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad f_-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

**1.18 BEM** (zu $f^+, f_-$ und $|f|$)

(i) Folgende Skizze illustriert Def 1.17:




(ii) Offensichtlich gilt

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \quad f_-(x) = -\min(f(x), 0),$$
$$f = f^+ - f_-, \quad |f| = f^+ + f_- \quad \text{und}$$
$$f \le g \implies f^+ \le g^+, \ g_- \le f_- \qquad [\text{Details UE}]$$

**1.19 PROP** ($\Delta$-Ungl für $R$-$\int$)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $R$-intbar, dann sind auch $f^+, f_-$ und $|f|$ $R$-intbar und es gilt

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Beweis • Wir beweisen zuerst die $R$-intbarkeit von $f^+$. Sei $\varepsilon>0$

$1.11 \Rightarrow \exists\, \varphi,\psi \in \mathcal{T}[a,b]$ mit $\psi\le f\le\varphi$ und

$$0\le \int\varphi-\int\psi\le\varepsilon$$

1.18(ii)

Nun sind $\varphi^+$ und $\psi^+ \in \mathcal{T}[a,b]$ mit $\psi^+\le f^+\le\varphi^+$ und

es gilt $\varphi^+-\varphi=\varphi_-\le\psi_-=\psi^+-\psi \Rightarrow \varphi^+-\psi^+\le\varphi-\psi \Rightarrow$

1.18(ii)

$$0\le\int\varphi^+-\psi^+\le\int\varphi-\psi\le\varepsilon$$

$$\overset{1.11}{\Longrightarrow} f^+ \text{ ist } R\text{-intbar}$$

• Die $R$-intbarkeit von $f_-$ folgt analog

• $|f|$ ist $R$-intbar wegen $|f|=f^++f^-$ und 1.15(i)

• Schließlich gilt wegen $f\le|f|$, $-f\le|f|$ mit 1.15(iii) $\int f\le\int|f|$ und $-\int f\le\int|f|$ und somit

$$\left|\int f\right|\le\int|f|. \qquad \square$$

**1.20 KOR** (Intbarkeit von Produkten)

Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $R$-intbar. Dann gilt

(i) $\forall p\in[1,\infty)$: $|f|^p$ ist $R$-intbar

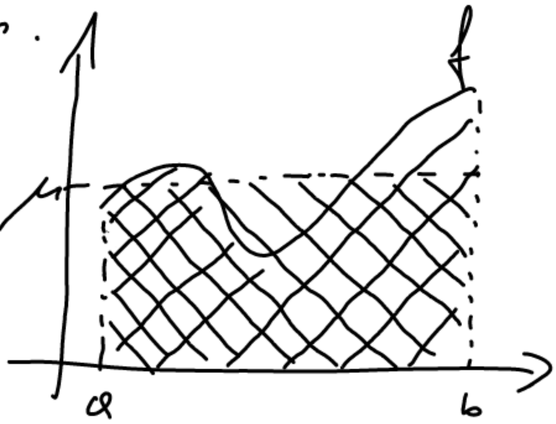
(ii) $f\cdot g$ ist $R$-intbar

Beweis. siehe [Hö S. 11 Prop (ii), (iii)] $\square$

## 1.21 MOTIVATION (MWS der Integralrechnung)

(i) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig & positiv. Dann ist $f$ R-intbar [1.12(i)] und $\int_a^b f(t)\,dt$ entspricht der Fläche $A$ unter dem Graphen.

Anschaulich ist klar dass es ein Rechteck der Höhe $\mu$ über $[a,b]$ geben muß, das den gleichen Flächeninhalt hat, also $\mu(b-a)=A$ gilt.



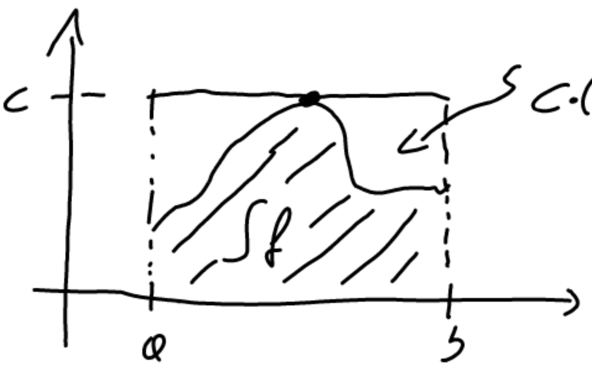

Dies ist tatsächlich der Fall, wie die nächste Prop zeigt. Zusätzlich besagt dieser MWS der Integralrechnung, dass es ein $\xi\in[a,b]$ gibt mit $f(\xi)=\mu$. Also zusammengefaßt:

$$\exists\,\xi\in[a,b]:\ \int_a^b f(t)\,dt=f(\xi)(b-a) \qquad (*)$$

(ii) Ähnlich wie der MWS der Differentialrechnung kann der MWS der Integralrechnung hervorragend dazu verwendet werden, um Abschätzungen herzuleiten [vgl. [B] 2.13]. Gilt z.B. $f(x)\le C\ \forall x\in[a,b]$, dann folgt sofort aus $(*)$,

$$\int_a^b f(t)\,dt\le C(b-a).$$

Diese Abschätzung lässt sich auch graphisch verstehen:




Die Fläche des Rechtecks über $[a,b]$ mit Höhe $C$ ist sicher größer als $\int_a^b f(t)dt$.

(iii) Wir formulieren nun den MWS-Int exakt und beginnen mit einer etwas allgemeineren Version

**1.22 PROP (MWS der Integralrechnung)**

Seien $f, \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ sodass

$$\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt = f(\xi)\int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

Insbesondere ergibt sich mit $\varphi(t) = 1 \;\forall t \in [a,b]$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = f(\xi)(b-a)}$$

Beweis. (erfreulich kurz)

$f$ stetig auf $[a,b] \xRightarrow{[2]\,2.11}$ $f$ beschränkt, d.h.

$m := \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ und

$M := \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ existieren

$$\Longrightarrow m \leq f \leq M \xRightarrow{\varphi \geq 0} m\varphi \leq f\varphi \leq M\varphi$$

$$\xRightarrow{1.15(iii)} m\int_a^b \varphi \leq \int_a^b f\varphi \leq M\int_a^b \varphi$$

$$\Longrightarrow \exists \mu \in [m,M]: \quad \int_a^b f\varphi = \mu \int_a^b \varphi$$

ZWS $\Longrightarrow \exists \xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \mu$, also

$$\int_a^b f\varphi = f(\xi) \int_a^b \varphi . \qquad \square$$

## 1.23 BEM (Teilintervalle & Orientierung)

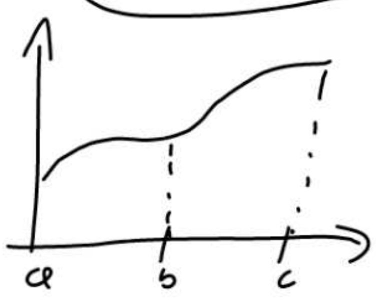
(i) Seien $a < b < c$ und $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ergibt sich durch Zusammenfügen der entsprechenden Treppenfkt.

$f$ ist $R$-intbar $\Longleftrightarrow$ $f|_{[a,b]}$ & $f|_{[b,c]}$ sind $R$-intbar

Einschränkung von $f$ auf $[a,b]$ bzw $[b,c]$

In diesem Fall gilt

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f .$$




(ii) Wir treffen folgende Vereinbarung. Falls $b < a$, dann setzen wir

$$\int_a^b f(t)\,dt := - \int_b^a f(t)\,dt .$$

Das reflektiert die Idee, dass die $x$-Achse in Richtung größerer Werte von $x$ <u>orientiert</u> ist.

(iii) Wir setzen $\int_a^a f(t)\,dt = 0$.

## 1.24 BEM (Riemannsummen)

In dieser Bemerkung diskutieren wir einen wichtigen alternativen Zugang zum R-Integral, der eine etwas einfachere Berechnung des R-Integrals erlaubt [die Methode Integrale zu berechnen folgt im nächsten §] und oft auch als Definition verwendet wird.

Wir beginnen mit einer (technischen) Definition

(i) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und sei $Z := \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$.
Wir wählen in jedem der Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ einen Punkt $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, genannt Stützstelle.

Teilungspunkte $t_j$ $(0 \le j \le n)$ und Stützstellen $\xi_j$ $(1 \le j \le n)$ fassen wir zusammen zu

[Fraktur Z] $\longrightarrow$ $$\mathfrak{Z} := \left( (t_k)_{k=0}^{n}, (\xi_k)_{k=1}^{n} \right)$$

und definieren die Riemann-Summe von $f$ bzgl $\mathfrak{Z}$ als

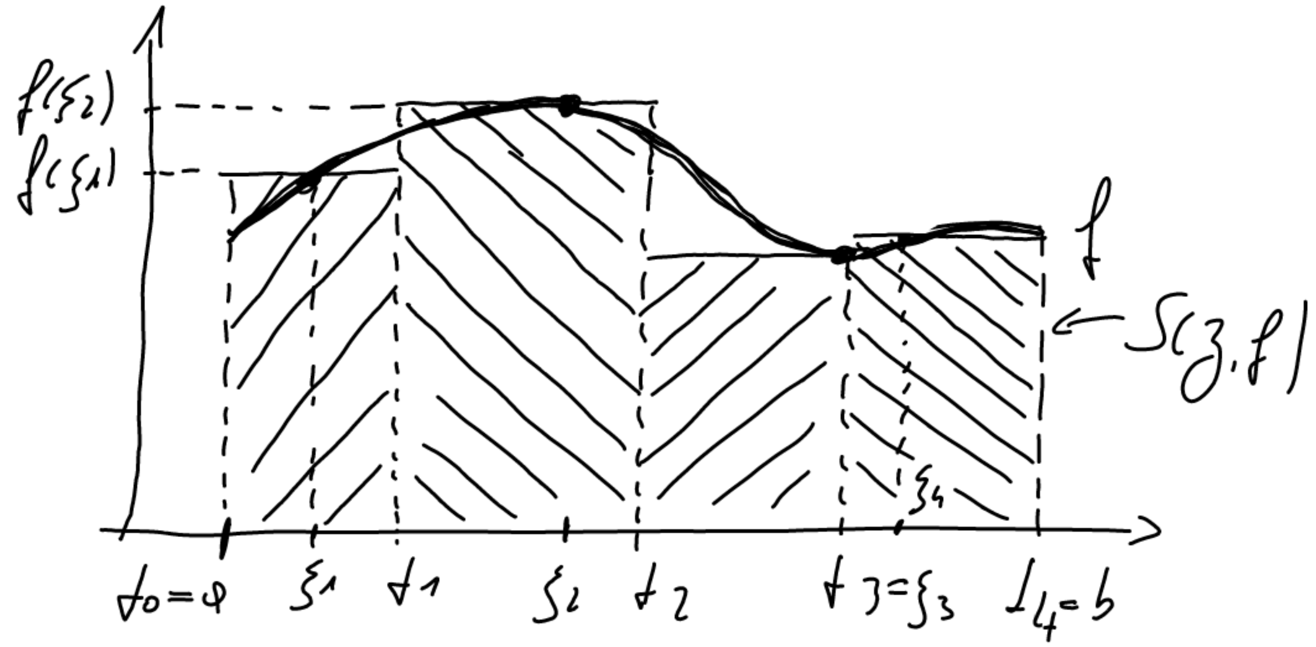
$$\boxed{S(\mathfrak{Z}, f) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})}$$

Rechtecksflächen mit Breite = Abstand der resp. Teilungspkte und Höhe = $f$ an der entspr. Stützstelle

Wir nennen $\mu(\mathfrak{Z}) = \max_{1\le k\le n} (t_k - t_{k-1})$ ← Länge des größten Teilintervalls

die Feinheit der Zerlegung $\mathfrak{Z}$

(ii) Wir können diese Def graphisch veranschaulichen:




Wir sehen, dass die R-Summe als Fläche unter dem Graphen einer Treppenfkt $\varphi$ interpretiert werden kann, wobei

$$\varphi(t) = f(\xi_i) \quad t \in (t_{i-1}, t_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und daher genauer

$$\boxed{\int_a^b \varphi(t)\,dt = R(\mathfrak{Z}, f)}$$

$\varphi$ interpoliert also $f$ an den Stützstellen $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Riemanns ursprüngliche Idee war es nun, den Grenzwert von $R(\mathfrak{Z}, f)$ für $\mu(\mathfrak{Z}) \to 0$ zu betrachten, also für immer feinere Zerlegungen bessere Approximationen durch an den Stützstellen interpolierende

Treppenfkt zu konstruieren.

Dieser Zugang ist unserem eng verwandt. Lediglich die Bestimmung der approximierenden Treppenfkt ist etwas expliziter.

Da es im Limes $\mu(\mathcal{Z}) \to 0$ anschaulich die Wahl der Stützstellen irrelevant wird, ist es nicht überraschend, dass beide Zugänge äquivalent sind. Genau gilt

(iii) THM: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt

$f$ ist R-intbar $\Longleftrightarrow$ $\exists s \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sodass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $\mu(\mathcal{Z}) < \delta$

$$|S(\mathcal{Z}, f) - s| < \varepsilon$$

Die R-Summen kommen s beliebig nahe, falls die Zerlegung nur fein genug ist.

In diesem Fall gilt $s = \int_a^b f(t)\,dt$

Beweis siehe [Hö, 9.13] $\square$

(iv) BSP. Wir berechnen exemplarisch das Integral $\int_0^a t\,dt$ $(a>0)$ mittels R-Summen.

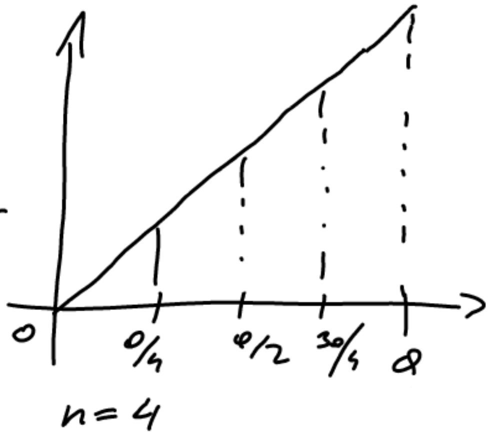
Sei $1 \le n \in \mathbb{N}$. Wir wählen als Zerlegungspkte $t_k := \frac{ka}{n}$ $(k=0,\dots,n)$ und Stützstellen $\xi_k = t_k$. Dann ist also

Das ist erlaubt, vgl. (i) & es ist einfach!

$$\mathcal{Z} = \left((t_k)_{k=0}^n, (\xi_k)_{k=1}^n\right) = \left(\left(\frac{ka}{n}\right)_{k=0}^n, \left(\frac{ka}{n}\right)_{k=1}^n\right)$$

und $\mu(\mathcal{Z}) = \frac{a}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Also ergeben sich die R-Summen




$$S_n = S(\mathcal{Z}, f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{ka}{n} \cdot \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \underline{\frac{a^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{a^2}{2}$$

und somit
$$\boxed{\int_0^a t \, dt = \frac{a^2}{2}}$$

Dieses Ergebnis sieht man natürlich auch elementargeometrisch; <u>richtig</u> Integrale berechnen lernen wir im nächsten §.

# §2 Integral & Ableitung

**2.1 Intro.** Im vorigen § haben wir den Begriff des Riemann-Integrals kennen gelernt & diskutiert.
Eine drängende Frage ist es nun: Wie berechnet man konkret ein Integral über z.B. eine stetige Fkt?

↳ jenseits von R-Summen

Der Schlüssel dazu liegt in der Zusammenführung des Integralbegriffs mit dem Differenzieren. Dies wird ultimativ vom Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HsDI) erledigt, den wir gleich kennen lernen werden.
Wir beginnen mit formalen Vorbereitungen und dem Begriff der Stammfunktion.

**2.2. Def** (Stammfunktion) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f$ auf $I$, falls

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

**2.3 Bsp** (Stammfunktion)
$F(x) = x^2/2$ ist Stammfunktion von $f(x) = x$ auf $\mathbb{R}$, denn

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x = f(x).$$

## 2.4. Motivation (2 Fragen zu Stammfkt.)

Zum Begriff der Stammfunktion ergeben sich unmittelbar & in natürlicher Weise die folgenden Fragen:

(1) Gibt es immer eine Stammfkt und wenn ja wieviele Stammfkt gibt es? ⟵ genauer: Welche $f$'s haben Stammfkt abseits von einfachen Bsp wie 2.3–2.3

(2) Wie kann man Stammfunktionen systematisch beschreiben / berechnen?

Wir beantworten den "Eindeutigkeitsteil" in (1) in der nächsten Prop und den Rest von (1) und (2) im nächsten Theorem, dem HSDI.

## 2.5 Prop (Differenz von Stammfkt)

Sei $F: I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: I \to \mathbb{R}$. Für $G: I \to \mathbb{R}$ gilt

$G$ ist (ebenfalls) Stammfkt von $f$ $\iff$ $F - G$ ist konstant

**Beweis.** ($\Rightarrow$) $G$ ist Stammfkt von $f$ $\Rightarrow$

$$G' = f = F' \Rightarrow (F-G)'(x) = 0 \ \forall x \in I \overset{[3]\,2.14(ii)}{\Longrightarrow} F - G \text{ konst.}$$

($\Leftarrow$) Sei $G(x) = F(x) + c$ $(c \in \mathbb{R}) \Rightarrow G$ diffbar [Baukasten] und es gilt $G' = (F+c)' = F' = f$. $\square$

## 2.6 MOTIVATION (zum Programm aus 2.4)

Prop 2.5 sagt uns, wie wir alle Stammfkt einer gegebenen Fkt $f: I \to \mathbb{R}$ berechnen, falls wir eine einzige Stammfkt haben (nämlich durch Addieren einer Konstanten).

Wie wir eine solche Stammfkt erhalten, falls $f$ stetig ist, sagt u.a. der

**2.7 THM: (Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung)**

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und seien $a, b \in I$ beliebig.

(i) Die Funktion $F: I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (*)$$

ist stetig differenzierbar ($F \in \mathcal{C}^1(I)$) und $F' = f$. Insbesondere ist $F$ eine Stammfunktion von $f$ auf $I$.

(ii) Sei $F$ eine (beliebige) Stammfunktion von $f$, dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

**Beweis:** (Für so ein zentrales Resultat erfreulich einfach und direkt)

(i) $f$ stetig $\Rightarrow$ $f$ R-intbar und $(*)$ ist sinnvoll, daher $F$ definiert.

Wir berechnen den Differenzenquotienten von $F$ in $x \in I$ beliebig. Sei $0 \neq h$ so, dass $x+h \in I$. Dann gilt

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right) \underset{1.24}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \quad (\Delta)$$

$$\overset{\text{MWS} \int}{\Longrightarrow} \exists\, \xi_h \in [x, x+h] \text{ mit } \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h)\,h \quad (\Delta\Delta)$$

Bemerke $\xi_h \to x$ falls $h \to 0$ $\left[\,|x-\xi_h| \le |x-(x+h)| = |h| \to 0\,\right]$.

Daher erhalten wir

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{(\Delta),(\Delta\Delta)}{=} f(\xi_h) \xrightarrow{f \text{ stetig}} f(x).$$

Warum stimmt das auch intuitiv? $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \overset{(\Delta)}{=} \square/h \approx \square/h = f(x)$

Also gilt $F' = f$ und somit ist $F'$ auch stetig.

(ii) Definiere $G$ wie in $(*)$, also $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$ $G$ ist Stammfkt von $f$

Sei $F$ beliebige Stammfkt von $f$ $\overset{2.5}{\Longrightarrow}$ $F = G + c$ $(c \in \mathbb{R})$

Daher gilt

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f + \int_a^a f \underset{1.24(iii)}{=} \int_a^b f(t)\,dt.$$

$\square$

## 2.8 BEM (Die Bedeutung des HsDI)

(i) Für die Pkte (i) & (ii) im HsDI bieten sich die folgenden Schreibweisen an (Notation wie im Thm.):

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a)}$$

„Diff von Int = Id"

„Int von Diff = Id bis auf eine Konstante"

Spätestens jetzt wird klar, dass der HsDI besagt, dass Differenzieren und Integrieren im wesentlichen „inverse Operationen" sind!

(ii) Etwas präziser können wir die Situation wie folgt darstellen (Notation wie im Thm):

$$f \in \mathcal{C}^0(I) \overset{\text{INT}}{\longmapsto} \left(F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\right) \overset{\text{DIFF}}{\longmapsto} F' = f \qquad (*)$$

d.h. $f$ stetig auf $I$ $\Rightarrow$ int.bar

diffb. wegen 2.7 (i)

wegen 2.7(i)

bzw. beginnend mit dem Differenzieren

$$F \in \mathcal{C}^1(I) \overset{\text{DIFF}}{\longmapsto} (F' \text{ R-intb.}) \overset{\text{INT}}{\longmapsto} \int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a) \qquad (**)$$

d.h. $F$ stetig diffb.

1.12(ii)

wegen 2.7(ii)

(iii) Definieren wir die folgenden Abbildungen

Ableitungsoperator

$$D: \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}(I), \quad F \mapsto F'$$

Integraloperator

$$R: \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}^1(I), \quad f \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$$

R landet in $\mathcal{C}^1$ wegen 2.7(i)

können wir wie folgt formulieren

$$\boxed{D \circ R = id : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)}$$

wegen (*)

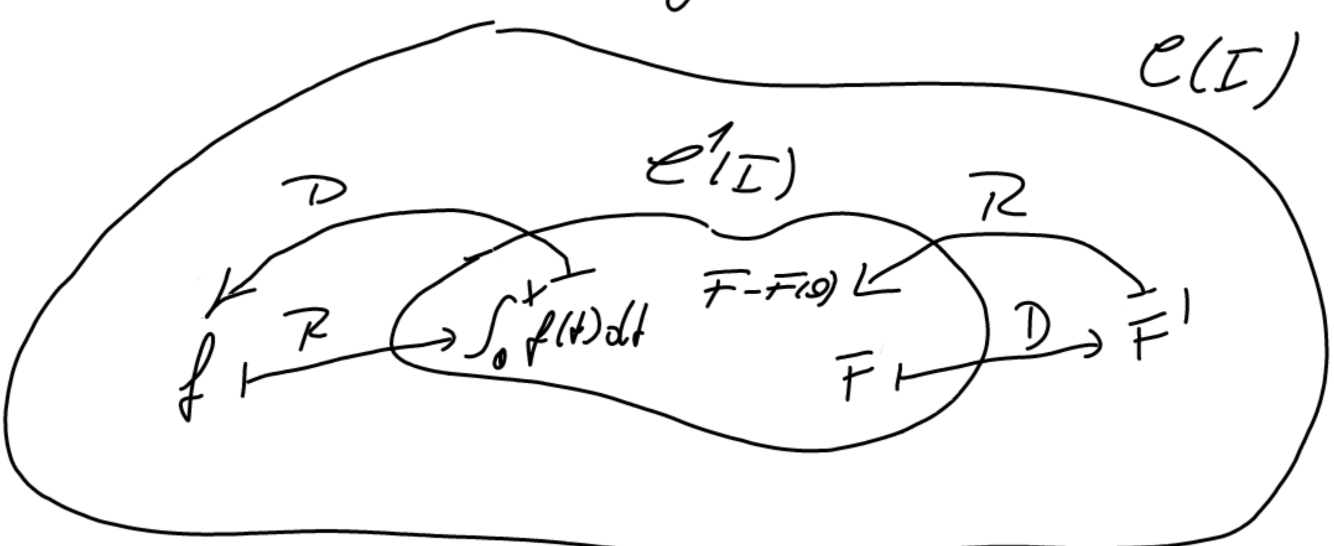
$$\boxed{R \circ D : \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^1(I) \text{ erfüllt } R \circ D(F) = F - F(a)}$$

wegen (**)

nur fast die Id

(iv) Neben der Tatsache, dass $R \circ D$ nicht ganz die Identität ergibt [$R \circ D = id +$ Konstante] haben $D$ & $R$ unterschiedliche Def- & Zielbereiche. Daher sind $D$ & $R$ eben doch nicht genau invers zueinander. – die Details des Slogans aus (i) sind essentiell!

Eine letzte Veranschaulichung der Situation ist:



## 2.9 MOTIVATION (Konkretes Integrieren)

(i) Der HsDI und insbesondere Thm 2.7(ii), d.h.

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) =: F(t)\Big|_a^b$$

praktische Schreibweise

erlaubt es nun praktisch konkrete Integrale zu berechnen: Wir müssen nur die Differenz der Werte einer (beliebigen) Stammfunktion an der Ober- bzw. Untergrenze bilden.

(ii) Wie erhalten wir eine Stammfunktion? Na durch unsere Ergebnisse aus [3] über das konkrete Differenzieren!

(iii) Als einfaches Bsp betrachten wir $\int_0^b x^n\,dx$ $(1 \le n \in \mathbb{N})$. Wegen $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ [[3] 1.8(ii)] gilt

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b .$$

Bevor wir weitere einfache Bsp betrachten ein begründetes Pamphlet!

**2.10 BEM** (Terminologische Katastrophe: unbestimmtes Integral)

(i) In vielen Texten findet man die Kurzschreibweise $F(x) = \int f(x)\,dx$ und meint damit eine oder auch alle Stammfkt von $f$. Der Ausdruck

$$\int f(x)\,dx \qquad (*)$$

FOLIE

wird dabei als „unbestimmtes Integral" bezeichnet.

(ii) Diese traditionell leider übliche Bezeichnung führt aber in eine echte terminologische Katastrophe

Genauer betrachten wir die folgenden Bezeichnungen:

| | BEI UNS | TRAD. ÜBLICH |
|---|---|---|
| $\int_a^b f(t)\,dt$ | Integral von $f$ zu $a$ und $b$ | bestimmtes Integral v. $f$ |
| $F$ mit $F' = f$ | Stammfkt von $f$ | unbestimmtes Integral v. $f$ |

Die hochgradig nichttriviale Aussage (ii) im HsDI, die das prakt. Integrieren erst ermöglicht, lautet „bei uns" (vgl. 2.9(ii))

Das Integral von $f$ zu $a$ und $b$ ergibt sich als die Differenz der Werte einer Stammfkt v. $f$ an Ober- bzw. Untergrenze

Die traditionelle Terminologie versteckt diese Aussage in der winzigen Vorsilbe eines Eigenschaftsworts:

Das bestimmte Integral von $f$ ist gleich der Differenz der Werte eines unbestimmten Integrals von $f$ an der Ober- bzw. Untergrenze.

(iii) Wir vermeiden daher die Bezeichnung „Unbestimmtes Integral" und verwenden (*) ausschließlich im folgenden Sinn:

„bestimme $\int f(t)\,dt$" bedeutet „finde eine Stammfkt. v. f".

## 2.11 BSP (Höchste Zeit: konkretes Integrieren)

(i) Wir verallgemeinern 2.9(iii) auf $-1 \neq s \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Wegen $(x^s)' = s x^{s-1}$ [[3] 1.29(ii)] gilt

$$\int_a^b x^s\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}\Big|_a^b \qquad (*)$$

Für $s \in \mathbb{N}$ gilt (*) sogar für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) Der Fall $s = -1$ in (i) führt auf ($a, b > 0$)

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log(x)\Big|_a^b \qquad [[3]\ 1.28(ii)]$$

(iii) $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$, $\int \sin(x)\,dx = \cos(x)$ [[3] 1.8(v)]

(iv) $\int e^x\,dx = e^x$ [[3] 1.8(iv)] {beachte 2.10(iii)!}

(v) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$ [[3] 1.29(iii)]

## 2.12 MOTIVATION (Mehr Werkzeuge!)

Um auch kompliziertere Fkt integrieren zu können — deren Stammfunktion wir nicht so einfach mittels unserer Ergebnisse aus [3] „sehen" — lernen wir nun