$$1 \overset{(i)}{=} \log'(1) \overset{1.6(ii)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n}) - \log(1)}{1/n}$$

log(1)=0

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \overset{\boxed{2}\ 3.3}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

TRICK?

$$= \underbrace{\log\circ\exp}_{id}\left(\lim\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$$

exp stetig

$$= \log\left(\lim \underbrace{\exp\circ\log}_{id}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$$

$$= \log\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right),$$

und daher mittels exp auf beiden Seiten der Glg angewendet

$$e = e^1 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

1.29 Bsp (Weitere diffbare Fkt)

(i) Die allgemeine Potenzfkt ($\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in(0,\infty)$) ist diffbar und es gilt

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

und daher insbesondere

$$\left\{(\sqrt[n]{x})' = (x^{1/n})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\right\},\quad (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tatsächlich können wir rechnen

$$(x^\alpha)' \underset{\boxed{2}\ \text{Def. } 3.5(i)}{=} (\exp(\alpha\log(x)))' \overset{1.23}{=} \exp'(\alpha\log x)(\alpha\log x)'$$

$$\underset{1.8(iv)}{=} \exp(\alpha\log x)\,\alpha\log'(x)$$

$$\underset{1.28(i)}{=} x^\alpha\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

(ii) (Affine Variablentransformation) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $g(x) := f(ax+b)$ ist diffbar mit

$$g'(x) \overset{1.23}{=} f'(ax+b)(ax+b)' = a f'(ax+b).$$

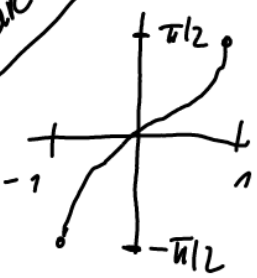
(iii) Der Arcussinus [[2] 3.28(ii)] ist auf $(-1,1)$ diffbar und es gilt

$\arcsin = \sin^{-1}$

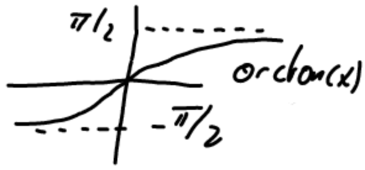
$$\boxed{\arcsin'(x) \overset{1.27}{=} \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$

$\cos = \sqrt{1-\sin^2}$



(iv) Der Arcustangens [[2] 3.28(iii)] ist diffbar auf seinem ganzen Defbereich $\mathbb{R}$ und es gilt



$$\arctan'(x) \overset{1.27}{=} \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} \overset{1.16(ii)}{=} \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$$

1.30 BEM (Höhere Ableitungen)

(i) (Notation & Def) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ auf (ganz I) diffbar. Dann definieren wir die Ableitungsfunktion durch

$$\boxed{f': I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)}$$

und wir können uns die Frage nach Eigenschaften dieser Fkt f' stellen – insbesondere nach ihrer Diffbarkeit.

Ist f' in $\xi \in I$ diffbar so schreiben wir $f''(\xi)$ für die Ableitung von f' in ξ und nennen $f''(\xi)$ die 2. Ableitung von f in ξ. Ist f' auf ganz I diffbar, so definieren wir die Fkt

$$f'': I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f''(x).$$

und nennen sie die 2. Ableitungsfunktion von f. Oft schreibt man auch $f^{(2)}$ für f''

Induktiv definieren wir nun die n-te Ableitung von f in $\xi \in I$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ via (falls $\exists$)

$$f^{(n)}(\xi) = \left(f^{(n-1)}\right)'(\xi)$$

die n-te Ableitung ist die Ableitung der (n-1)-ten Abl.

In diesem Zusammenhang schreiben wir auch $f^{(0)}$ für f selbst.

(ii) (Ein Bsp)

$$\sin'(x) = \cos(x)$$
$$\sin''(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$$
$$\sin'''(x) = -\sin'(x) = -\cos(x)$$
$$\sin^{(4)}(x) = -\cos'(x) = \sin(x)$$
$$\sin^{(5)}(x) = \sin'(x) = \cos(x), \quad \text{usw.}$$

Also gilt

$$\boxed{\left\{ \sin^{(2n)} = (-1)^n \sin, \quad \sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos \right.}$$

Somit ist sin beliebig oft diffbar, d.h. n-mal diffbar für jedes $n \in \mathbb{N}$. Solche Fktionen nennt man auch <u>glatt</u> oder $\mathcal{C}^\infty$-Fkt.

Funktionen, die n-mal diffbar sind und deren n. Ableitung stetig ist, nennt man auch n-mal stetig differenzierbar oder $\mathcal{C}^n$-Funktionen.

(iii) <u>WARNUNG!</u>

($\mathcal{C}^n \not\Rightarrow \mathcal{C}^{n+1}$)

Eine diffbare Funktion muß keine diffbare Ableitung haben. z.B ist $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ zwar $\mathcal{C}^1$ aber nicht 2x-diffbar.
[Details UE]

(diffbar $\not\Rightarrow \mathcal{C}^1$)

Noch schlimmer muß die Ableitung einer diffbaren Fkt nichteinmal stetig sein, z. B ist

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ diffbar aber nicht $\mathcal{C}^1$
[Details UE]

§2 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

2.1 Intro. In diesem § kommen wir zu ersten Anwendungen der Differentialrechnung. Wir werden sehen, dass sich viele Eigenschaften von Fkt in ihrer Ableitung widerspiegeln (vgl. 0.1). Insbesondere werden wir die Monotonie, die Konvexität und das Auftreten lokaler Extrema mithilfe der Ableitung untersuchen. Außerdem werden wir aus Schranken an die Ableitung Schranken an die Fkt. selbst gewinnen und die aus der Schulmathematik wohlbekannten Regeln von de l'Hospital beweisen.

Der Schlüssel zu all diesen Resultaten ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS) den wir ausführlich diskutieren.

Wir beginnen mit einer Sprechweise

1.1A Notation/Sprechweise (Randpunkte & innere Pkte von Intervallen)

Sei I ein Intervall

(i) Falls I beschränkt ist, also von der Form [vgl [0] 1.6]
$[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ oder (a,b), dann heißen
a & b Randpunkte von I.

(ii) Falls I halbbeschränkt ist, also von der Form $[a,\infty)$ oder (a,∞) (bzw. $(-\infty,b]$ oder $(-\infty,b)$) dann heißt a (bzw. b) <u>Randpunkt</u> von I

(iii) $\xi \in I$ heißt <u>innerer Punkt</u> von I, falls ξ kein Randpunkt ist.

(iv) Z.B ist die Menge der inneren Punkte (das sog. <u>Innere</u>) von $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ und (a,b) jeweils (a,b).
Insbesondere besteht jedes offene Intervall nur aus inneren Punkten, ist also gleich seinem Inneren.

<u>2.2 DEF</u> (<u>lokale Extremwerte</u>) Sei I ein Intervall und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

(i) Ein Pkt $\xi \in I$ heißt <u>lokales Maximum</u> von f falls es eine Umgebung von ξ gibt auf der f nur Funktionswerte kleiner-gleich $f(\xi)$ annimmt, d.h. falls

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: \ f(\xi) \geq f(x). \qquad (*)$$

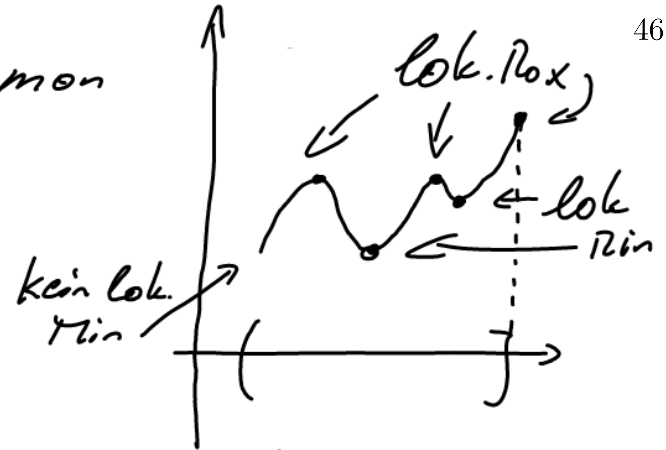
(ii) Der Pkt ξ heißt <u>striktes lokales Maximum</u> von f, falls in $(*)$ „$>$" statt $\geq$ gilt, d.h. falls

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: \ f(\xi) > f(x).$$

(iii) Analog sind (<u>strikte</u>) <u>lokale Minima</u> definiert, d.h ξ heißt (striktes) lokales Minimum, falls

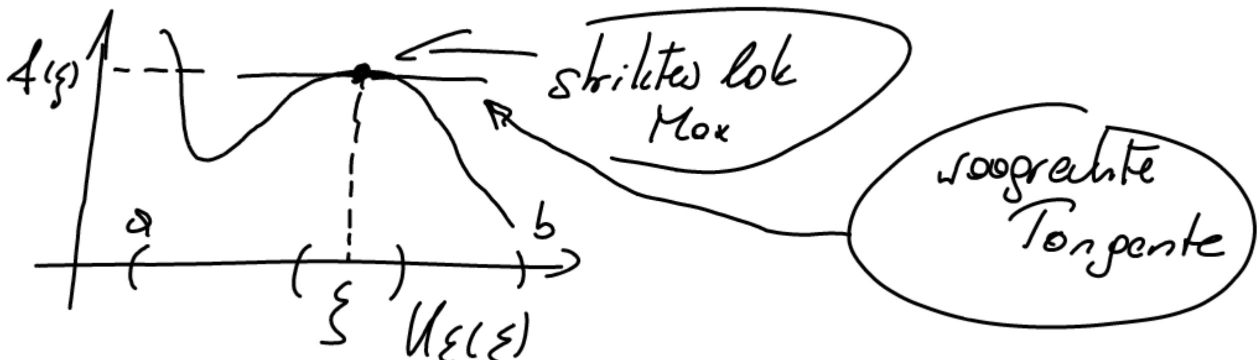
$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \cap I: \ f(\xi) \leq f(x) \ \ (f(\xi) < f(x)).$$

(iv) In beiden Fällen spricht man von einer (strikten) lokalen Extremstelle oder einem (str.) lok. Extremum



2.3 BEM (Extrema & Ableitung, die Idee)

(i) Der Inhalt von Def 2.2 für innere Punkte ξ (für ein str. lok. Max.) kann so veranschaulicht werden



(ii) Geometrisch erwarten wir uns, dass – falls f diffbar in ξ ist – f dort eine waagrechte Tangente hat, also $f'(\xi) = 0$ gilt.
Tatsächlich ist das eine notwendige Bedingung, wie wir gleich sehen werden

2.4 PROP (Notwendige Bedingung f. lok. Extrema)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar und sei ξ ein innerer Pkt von I. Falls ξ Extremum von f ist, dann gilt $f'(\xi)=0$.

Beweis. Wir behandeln nur den Fall des lok. Max, der Fall des Min ist völlig analog.

Sei also ξ ein (nicht notwendigerweise strikter) lok. Max. Dann gilt

$$\overset{2.2(i)}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon>0\ \forall x \in U_\varepsilon(\xi) \quad f(\xi) \geq f(x)$$

$$\overset{f \text{ diffbar in } \xi}{\Longrightarrow} \lim_{x \nearrow \xi} \underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\geq 0} = f'(\xi) = \lim_{x \searrow \xi} \underbrace{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}_{\leq 0}$$

[Zähler ≤ 0, Nenner ≤ 0] [Zähler ≤ 0, Nenner ≥ 0]

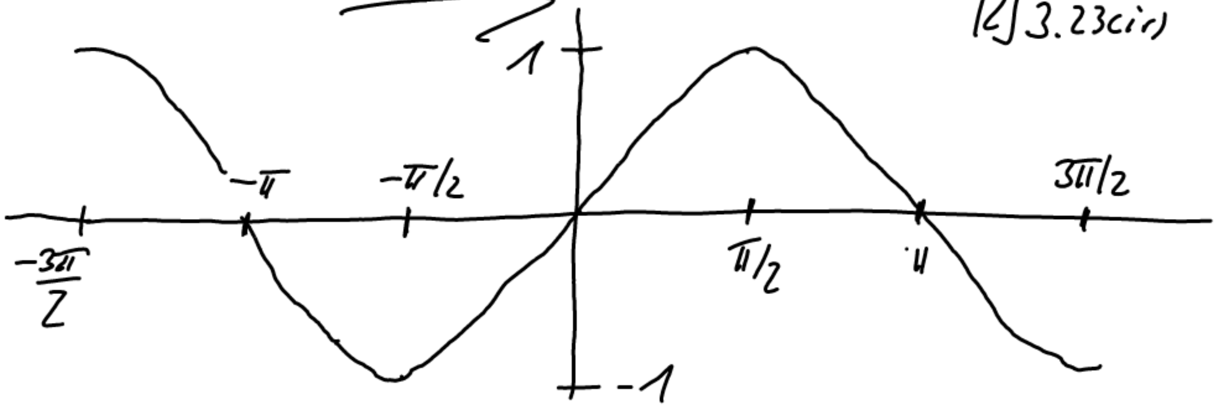
Also $0 \leq f'(\xi) \leq 0$ und damit $f'(\xi)=0$. $\square$

2.5 BSP (Extrema des Sinus) Wir betrachten $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

In [2] 3.24(ii) haben wir bereits festgestellt, dass die Extrema des Sinus in $\pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ liegen.

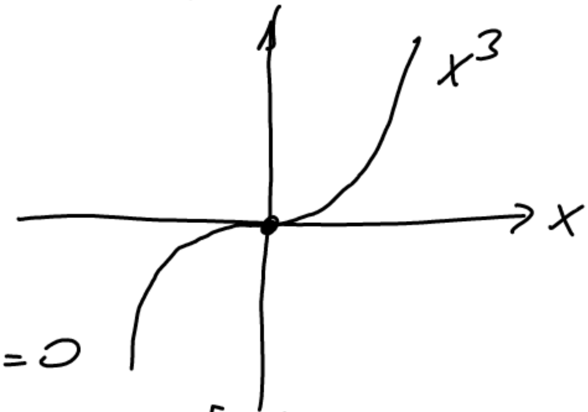
[mittels $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ sind es genau die NST des cos]

Tatsächlich gilt $\sin'\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = 0$ [2] 3.23(ii)



2.6 WARNUNG (Notwendig vs hinreichend, lokal vs. global)

(i) 2.4 sagt, dass $f'(\xi)=0$ notwendige Bedingung für ein lok. Extr. ist — Sie ist <u>nicht</u> hinreichend, wie folgendes Bsp zeigt



$f: (-1,1) \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$

Es gilt $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$
aber $\xi = 0$ ist kein lokales Extr [denn jede Umgebung $U_\varepsilon(0)$ enthält pos & negative x und damit nimmt f auf $U_\varepsilon(0)$ pos & neg. Werte an]

Daher gilt also

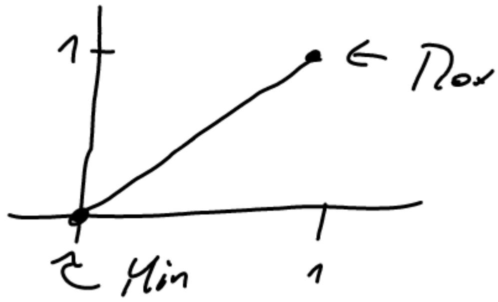
$$\boxed{\text{lok Extr} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0}$$

und Nullstellen von f' sind <u>nur Kandidaten</u> für lok. Extr.

(ii) Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann besagt [2] Thm 2.11, dass f globale Max & Min auf $[a,b]$ besitzt.

Diese können am Rand von $[a,b]$ liegen, also in a oder in b. Selbst falls f diff'bar auf $[a,b]$ ist (mit einseitigen Ableitungen in a,b) müssen $f'(a)$ und $f'(b)$ <u>nicht</u> verschwinden, wie das folgende Bsp zeigt.

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$
$f(x)=x$



Dann hat f ein Min in $\xi=0$ und ein Max in $\xi=1$ aber $f'(0)=1=f'(1)$.

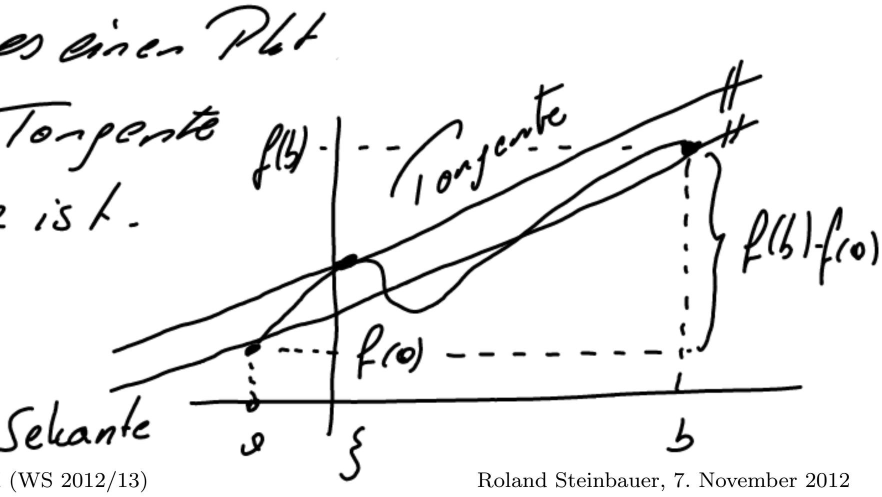
Dieses Bsp steht nicht im Widerspruch zu 2.6., da 0 & 1 keine inneren Pkte von $I=[0,1]$ sind, also 2.6 über $f'(0)$, $f'(1)$ keine Aussage macht.

Wenn wir andererseits $f(x)=x$ auf $I=(0,1)$ betrachten, dann hat f weder Min noch Max (nur inf & sup) und das Problem löst sich in Luft auf...

2.7 MOTIVATION (lokale Änderungsrate – globale Eigenschaften) – MWS

(i) Wir unternehmen jetzt den ersten Schritt, der es uns erlauben wird, aus der Kenntnis der Ableitung einer Fkt (in allen Pkten eines Intervalls) globale Eigenschaften der Fkt abzuleiten: den Mittelwertsatz (MWS)

(ii) Dessen Aussage ist anschaulich evident: Im Intervall I muß es einen Pkt geben in dem die Tangente parallel zur Sekante ist.



(iii) Der Satz hat auch eine anschauliche Bedeutung im Rahmen der Mechanik (vgl. 1.11):
Ein Auto fährt auf einem Autobahnstück der Länge 135 km und legt dieses in 1 Stunde zurück. Dann muß irgendwann die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von 130 km/h überschritten worden sein.
Hier entspricht die Ableitung der Ortsfunktion der Momentangeschwindigkeit und es muß einen Zeitpunkt geben an dem diese gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit von 135 km/h ist.

Nun zur exakten Formulierung des MWS

2.8 THM (Mittelwertsatz)
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b). Dann gibt es einen Pkt $\xi \in (a,b)$ mit

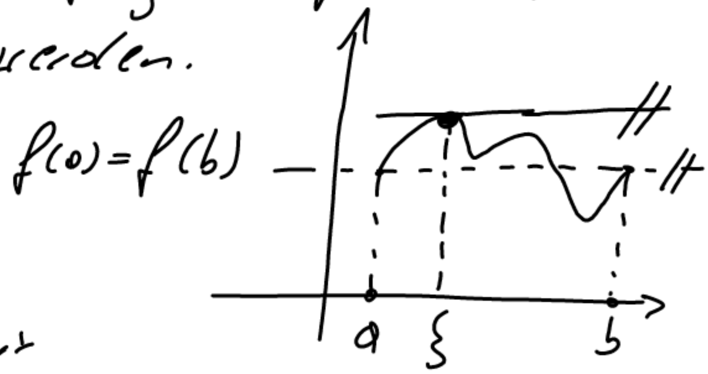
$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

oder (was dasselbe ist) mit

$$\boxed{f(b)-f(a) = f'(\xi)\,(b-a)} \quad (2.1)$$

2.9 Bem (Beweisstrategie: „Kippen" des Graphen)
(i) Die grundlegende Beweisstrategie besteht darin, den Graphen von f zu modifizieren und so

$f(a)=f(b)$ zu erreichen. Damit müssen wir lediglich einen Pkt mit $f'(\xi)=0$ finden, was wir mittels 2.4 tun werden.



(ii) Die Idee ein solches ξ zu finden ist nun die folgende. Interpretieren wir f als die „Höhenfunktion" bei einer Bergwanderung. Dann bedeutet $f(a)=f(b)$, dass wir uns am Abend auf derselben Seehöhe befinden wie in der Früh. Klarerweise können wir weder immer bergauf noch immer bergab gegangen sein. Vielmehr werden wir genau dort wo wir vom Bergaufgehen zum Bergabgehen übergegangen sind – also am Gipfel (≙ lok Max) – eine waagrechte Tangente (kein Anstieg) gehabt haben.

Diese Ideen gießen wir nun in wasserdichte Mathematik.

2.10 LEMMA (Satz von Rolle)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und diff'bar auf (a,b). Falls $f(a)=f(b)$, dann gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit

$$f'(\xi)=0$$

Beweis. (erfreulich kurz)

(1) Falls f konstant ist $[f(x) = f(a) = f(b)\ \forall x \in (a,b)]$ ist die Aussage trivial $[f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$ 1.8(i)$]$

Sei also f nicht konstant
$\Rightarrow \exists x \in (a,b)$ mit $f(x) > f(a)$ oder $f(x) < f(a)$;

sei oBdA $\underline{f(x) > f(a)} = f(b)$ $(*)$ [sonst analog]

(2) f stetig auf $[a,b] \overset{[2]\, 2.11}{\Longrightarrow}$ f hat ein Max in $[a,b]$
d.h. $\exists \xi \in [a,b]$ mit

$(**)$ $\quad f(\xi) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b]$

(3) Wegen $(*)$ kann ξ nicht am Rand liegen, also ist ξ innerer Punkt $[\xi \in (a,b)]$ und wir können Prop 2.4 verwenden [beachte $(**)$]
$\overset{2.4}{\Longrightarrow} f'(\xi) = 0.$ $\qquad \square$

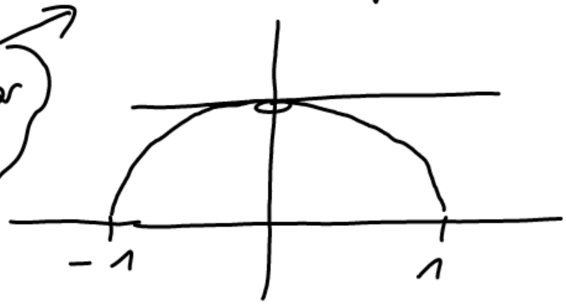
2.11 Bem (zum Satz von Rolle & seinem Beweis)

(i) Beachte, dass der Beweis & auch der Satz wesentlich auf [2] Thm 2.11 beruht, also darauf, dass stetige Fkt auf kp Mengen Min & Max besitzen
[und somit letztlich auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.]

(ii) Die Voraussetzungen f stetig auf $[a,b]$ und diffbar auf dem Inneren (a,b) von $[a,b]$ ist natürlich teilweise redundant: aus diffbar in (a,b) folgt natürlich stetig in (a,b) [1.13].
Daher bewirkt die Voraussetzung f stetig in $[a,b]$ nur die Stetigkeit am Rand, also in a und b.

Natürlich hätten wir auch f diffbar auf $[a,b]$ voraussetzen können. Da diese Voraussetzung etwas stärker ist, würde das Lemma schwächer werden. z.B wäre die Fkt $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ auf $[-1,1]$ nicht erfaßt.

nichtdiffbar in ± 1 vgl. UE10[3]



(iii) Beachte, dass alle Voraussetzungen im Lemma tatsächlich notwendig sind. [Details UE].

(iv) Wir beweisen jetzt den MWS indem wir den Graphen der Fkt im MWS in „Rolle-Position" bringen.

2.12 Beweis des MWS. Sei f wie im Thm. Wir definieren

$$g(x):=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Damit ist g stetig auf $[a,b]$, diffbar auf (a,b) und $g(a)=f(a)=g(b)$.

lt. „Baukasten"

$\overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \xi \in (a,b)$ mit

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \square$$

2.13 Bem (Anwenden des MWS)

Der MWS ist ein reines Existenzresultat; in dem Sinn, dass die Existenz von ξ mit der entsprechenden Eigenschaft zwar garantiert ist er aber keine Möglichkeit liefert, ξ auch tatsächlich zu berechnen.

Daher wird der MWS meist in der Form (2.1) verwendet, um Abschätzungen herzuleiten. Das werden wir auch gleich tun und dabei erste Anwendungen der Differentialrechnung kennen lernen, die globale Aussagen über die Fkt ermöglichen; genauer über Wachstumsschranken & Monotonie.

vgl. 0.1

2.14 KOR (Wachstumsschranken)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b).

(i) Falls f' beschränkt ist, d.h. $\exists\, C > 0$ mit

$$|f'(x)| \le C \quad \forall x \in (a,b),$$

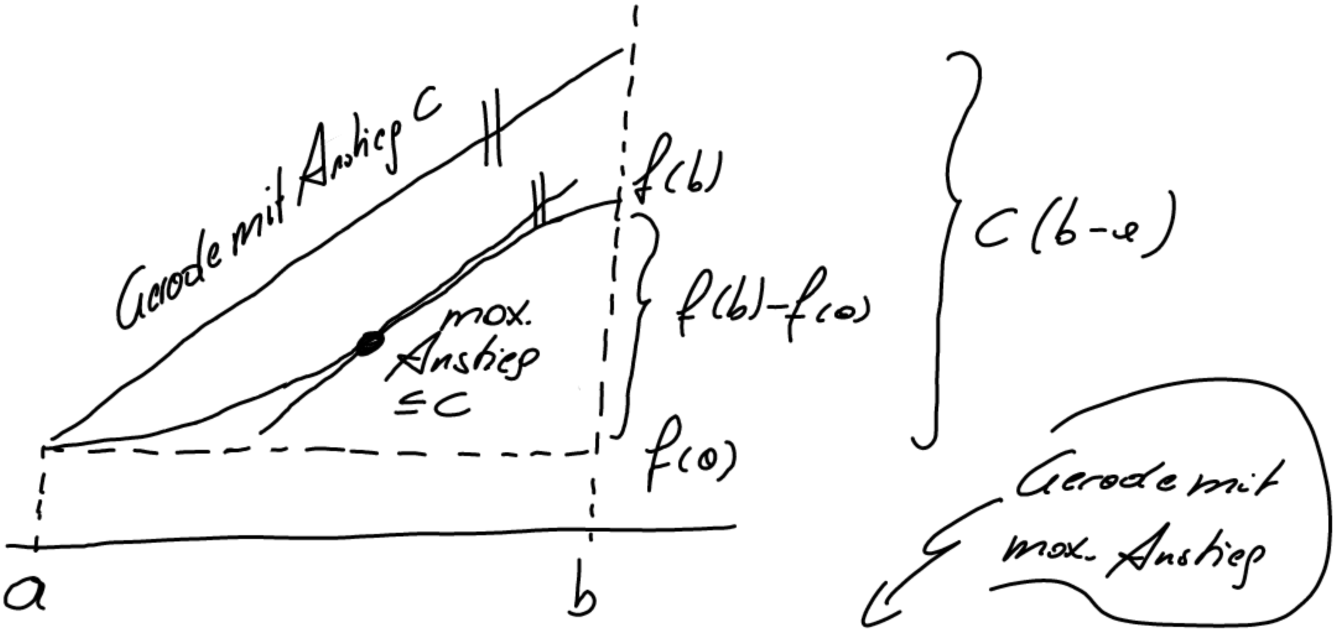
dann gilt für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le C\,|x_2 - x_1| \qquad (2.2)$$

(ii) Falls $f'(x)=0\ \forall x\in(a,b)$, dann ist f konstant [genauer $f(x)=f(a)=f(b)\ \forall x\in(a,b)$].

2.15 Bem (Lipschitzstetigkeit)

(i) Die Bedeutung von (i) kann leicht in einer Skizze veranschaulicht werden:



Eine Funktion f mit $|f'(x)|\leq C\ \forall x$ kann nicht stärker wachsen als eine Gerade mit Anstieg C, bzw $f(b)$ muß kleiner sein als $f(a)+C(b-a)$, also $f(b)-f(a)\leq C(b-a)$.

(ii) Funktionen, die (2.2) erfüllen heißen <u>Lipschitz-stetig</u> oder <u>dehnungsbeschränkt</u>, genauer $f:I\to\mathbb{R}$ heißt L-stetig, falls

$$\boxed{\exists C>0:\ |f(x)-f(y)|\leq C|x-y|\ \forall x,y\in I}$$

Die Fktionswerte liegen also nicht weiter auseinander als die Argumente mal einer fixen Konstante C, genannt <u>Dehnungsschranke</u>.