Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer

Fakultät für Mathematik
Universität Wien

Wintersemester 2012/13
2 Wstd / 4 ECTS

3 DIFFERENTIATION

Bevor wir tatsächlich mit dem Thema Differentialrechnung starten setzen wir dieses in Beziehung ersten Teil der VO und geben auch einen Ausblick auf die weiteren Themen dieses 2. Teils des VO-Zyklus Analysis.

§0 RÜCKBLICK & AUSBLICK

0.1 WH aus [0] §0 (Was will und was soll die Analysis)

Der inhaltliche Kern der Analysis ist [[0] 0.2] die <u>Differential</u>- & <u>Integralrechnung</u>.

<u>Genauer</u>: das Verstehen & Beschreiben des Änderungsverhaltens von Funktionen

<u>Noch genauer</u> ist das Hauptthema der Analysis:

> Welche Begriffe eignen sich am Besten dazu die Änderung einer Fkt im Kleinen (d.h. lokal um einen Pkt im Defbereich) zu verstehen und was kann man daraus über die Fkt im Großen (d.h. ihren Gesamtverlauf) sagen!

0.2 Rückblick auf [1] & [2]

Zentraler Begriff: STETIGKEIT

- beschreibt ja genau das lokale Änderungsverhalten von Fkt
- aber noch nicht genau genug?
- baut auf auf dem

Zentraler Begriff: GRENZWERTBEGRIFF

- liefert via (abs konv) Reihen auch das Hauptwerkzeug zur Konstruktion interessanter Fkt (über Polynome & rationale Fkt hinausgehend)

exp, log, sin, cos, tan, arcsin, arccos, arctan
x^α, sinh, cosh, tanh

Mit diesen Inhalten und auch den Techniken der EidA haben wir einen Grundstein auf dem wir hoch hinaus aufbauen können.

0.3 Ausblick auf [3]:

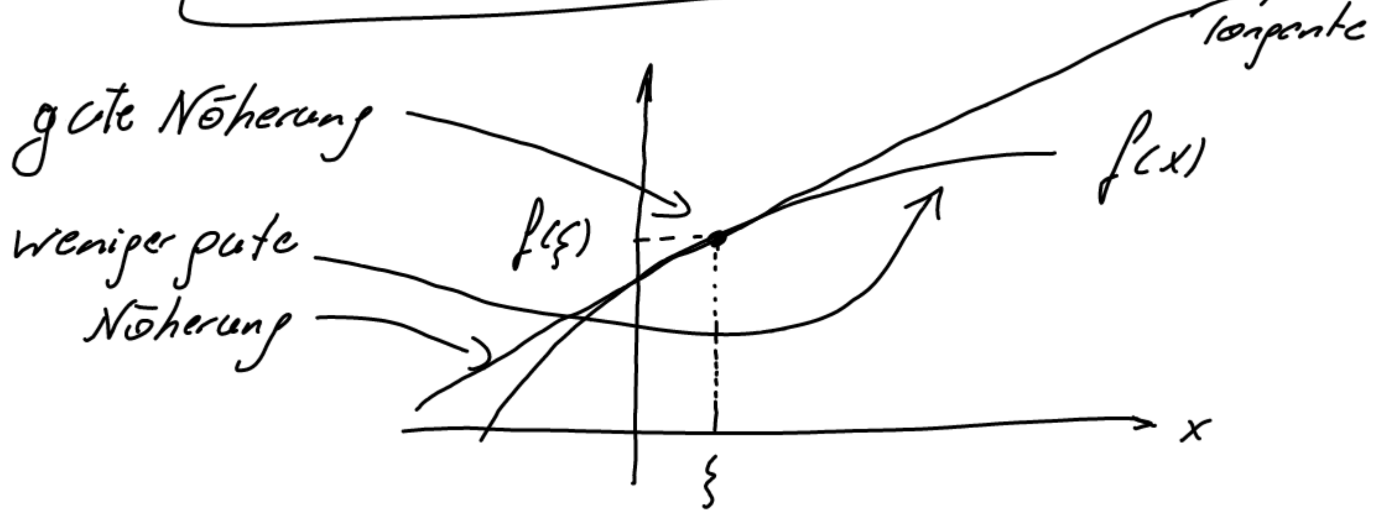
Hier nimmt unser Studium des Änderungsverhalten von Fkt die alles entscheidende Wendung!

Idee: Vergleiche die Änderung einer Fkt f nahe ξ (Pkt im Defbereich) mit der einfachsten nicht-konstanten Fkt $x \mapsto x$

geht weit über Stetigkeit hinaus

Formaler: f heißt differenzierbar in ξ, falls f nahe ξ gut durch eine Gerade (ihre Tangente) approximiert werden kann.

$[xi]$



Wir werden sehen, dass diese Idee enorm weit trägt!

0.4 Ausblick auf [3] - Details

(i) Zunächst werden wir in §1 die Begriffe Differenzierbarkeit & Ableitung von Fkt gründlich untersuchen.

Natürlich spielen hier die „alten Bekannten“ Differenzenquotient & Differentialquotient wichtige Rollen. Neu hinzu kommt ein anderer Gesichtspunkt, der viel allgemeiner gefaßt werden kann und daher auch viel weiter trägt [vgl. vor allem 3. Teil der VO]

Die Ableitung als lineare Bestapproximation an die Funktion

Wir klären das Verhältnis der Diffbarkeit zur Stetigkeit und leiten die „schulbekannten[1]“ Ableitungsregeln her um damit die wichtigsten Funktionen zu differenzieren.

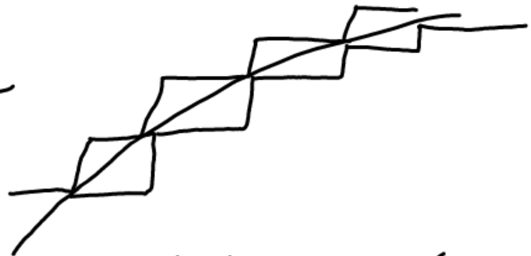
(ii) Desweiteren lernen wir in §2 die wichtigsten Sätze über differenzierbare Funktionen kennen: den Mittelwertsatz der Differentialrechnung - eines der Hauptresultate der VO, Kriterien für (lokale) Extremstellen und die De L'Hospital-Regeln – die letzteren sicher auch „schulbekannt“.

[1] „schulbekannt“ in Analogie zu amtsbekannt.

0.5 Weiterer Ausblick auf die Vorlesung

(i) In Kapitel [4] befassen wir uns gründlich mit der <u>Integralrechnung</u>. Wir lernen das <u>Riemann-Integral</u> kennen. Hier wird der Grenzwertbegriff verwendet um eine Eigenschaft einer Fkt <u>im Großen</u> zu definieren: Eine Fkt heißt integrierbar, wenn sie sich gut zwischen <u>Treppenfkt</u> „einzwicken" läßt.

Die Brücke zwischen Differential- und Integralrechnung schlägt der



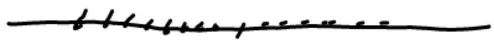
<u>Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung</u>.

Er ermöglicht nicht nur das konkrete Berechnen von Integralen und somit Flächen sondern verbindet <u>lokale</u> mit <u>globalen Eigenschaften</u> von Fkt. – vgl 0.1

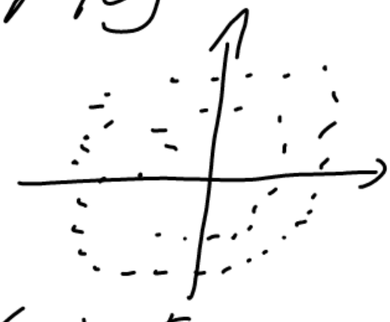
Wir lernen außerdem den <u>Satz von Taylor</u> kennen, der es erlaubt („schöne") Fkt nur aus der Kenntnis ihrer höheren Ableitungen in einem einzigen Pkt zu rekonstruieren! – vgl 0.1

(ii) Dieser Satz wird uns dazu führen Folgen (und auch Reihen) von Funktionen zu studieren.

Das sind Folgen, deren einzelnen Glieder nicht reelle Zahlen sind, sondern Funktionen $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese studieren wir in Kap. $\boxed{5}$



Folge in $\mathbb{R}$



Folge in $\mathbb{C}$

Folge von Funktionen

Wir lernen Konvergenzbegriffe für solche Folgen kennen und betrachten spezielle Funktionenreihen: Potenzreihen & Fourier-Reihen.

Verallgemeinerung von Polynomen

Zerlegung von periodischen Funktionen („Signalen") in Grund- und Oberschwingungen; sehr wichtig in Anwendungen

§1 DIFFERENZIERBARKEIT & ABLEITUNG

1.1 MOTIVATION (Änderungsverhalten von Funktionen)

(i) Wir haben im Verlauf der EidA öfters gesehen, dass es bei der Untersuchung von Funktionen weniger darauf ankommt, ihre Werte an vorgegebenen Stellen zu kennen als vielmehr die

Veränderung der Funktionswerte bei Veränderungen des Arguments.

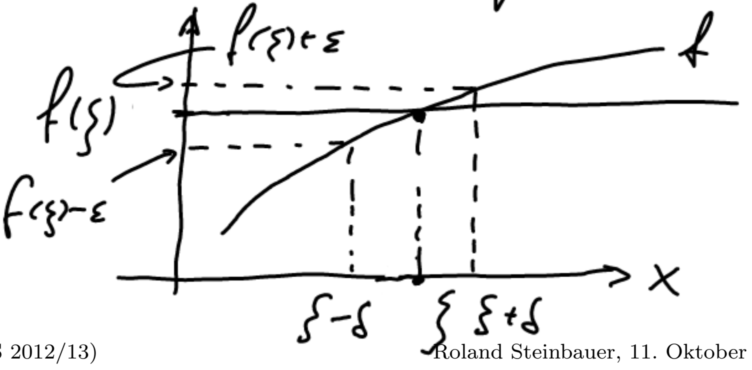
Zwei dieser „Änderungsmodi" haben wir schon kennen gelernt: Monotonie [[2] 2.17] & Stetigkeit [[2] §1]

(ii) Erinnern wir uns an die Definition der Stetigkeit [[2] 1.6] für eine Fkt $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ im Punkt $\xi \in D$:

[Xi]

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \text{ mit } |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

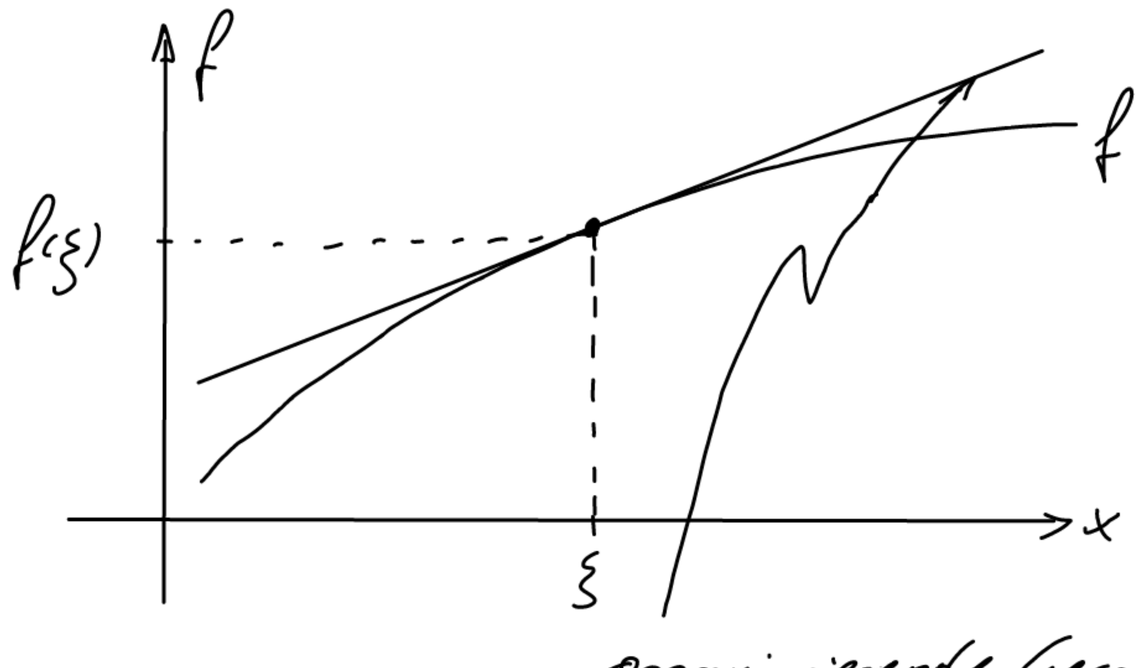
Stark vereinfacht bedeutet das, dass sich f nahe ξ wie die konstante Funktion $x \mapsto f(\xi)$ verhält.



(iii) Dem Begriff der Differenzierbarkeit einer Fkt $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ können wir uns [unter vielen alternativen Zugängen! siehe auch später] auf ähnliche Weise nähern, die etwa auch ein beliebter Zugang der Schulmathematik ist:

Wir werden f bei $\xi \in D$ <u>differenzierbar</u> nennen, wenn f „in der Nähe" von ξ „sehr gut" durch eine Gerade approximiert werden kann. (*)

Diese Gerade ist dann natürlich die Tangente [aus der Schulmathematik].



approximierende Gerade, Tangente bei $(\xi, f(\xi))$

Um die Idee (*) zu präzisieren und in eine offizielle Def gießen zu können, müssen wir sie zunächst etwas formaler ausdrücken:

Die approximierende Gerade hat – sowie jede Gerade – die Form

$$(**)\quad g(x) = \alpha x + \beta.$$

Anstieg

„y-Abschnitt"

Außerdem passiert g den Punkt $(\xi, f(\xi))$, d.h.

$$f(\xi) = g(\xi) = \alpha\xi + \beta. \qquad (***)$$

Daher ergibt sich in Punkten $x = \xi + h$

$$g(x) = g(\xi+h) \overset{(**)}{=} \alpha(\xi+h) + \beta = \alpha\xi + \beta + \alpha h \overset{(***)}{=} f(\xi) + \alpha h$$

Im Sinne unserer Approximations-Idee $(*)$ bedeutet das, dass für x „nahe bei" ξ (d.h. für „kleine" h)

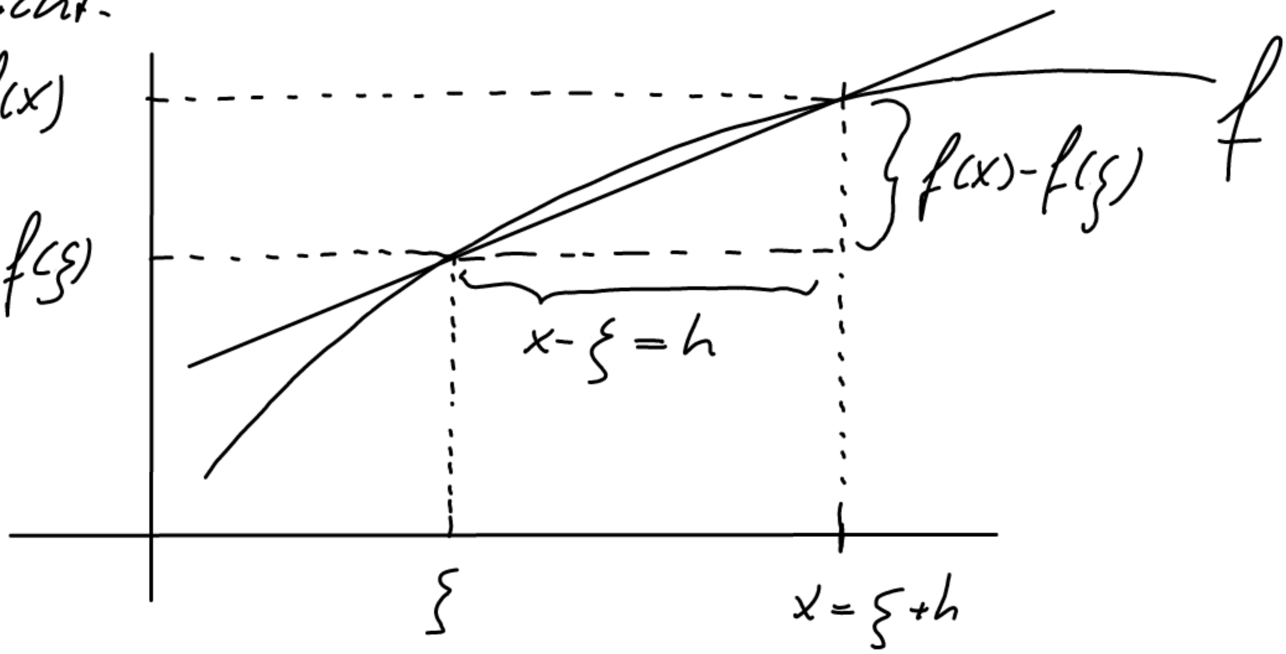
$$f(x) = f(\xi+h) \approx g(\xi+h) = f(\xi) + \alpha h \qquad (\Delta)$$

gilt.

Noch bevor wir (Δ) präziser fassen, können wir es verwenden, um den noch unbekannten Anstieg α der approx. Geraden g zu bestimmen, nämlich

$$\alpha \approx \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Diesen Ausdruck werden wir als <u>Differenzenquotient</u> bezeichnen. Seine graphische Bedeutung ist, dass er der Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(\xi, f(\xi))$ und $(\xi+h, f(\xi+h)) = (x, f(x))$ entspricht.



(iv) Der weitere Weg der Präzisierung von (*) ist nun vorgezeichnet. Um der Idee (*) gerecht zu werden müssen wir uns mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0} \frac{f(\xi+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{x\to\xi \\ x\neq\xi}} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$$

sonst sinnlos!

befassen, bzw. untersuchen, ob er überhaupt existiert.

– Jetzt offiziell:

1.2 DEF (Differenzenquotient)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f: I \to \mathbb{R}$ und $\xi \in I$ fix. Für $I \ni x \neq \xi$ heißt der Ausdruck $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ Differenzenquotient von f bei ξ.

1.3 BEM (2 Variablen) Formal hat der Differenzenquotient den Nachteil, dass er von 2 Variablen, nämlich ξ und x abhängt. Wie in 1.1(iv) angedeutet wollen wir die Abhängigkeit von x durch Übergang zum Limes $x \to \xi$ loswerden, wobei der Differenzenquotient in die Tangentensteigung übergehen sollte.

die 2 Pkte, die die Sekante festlegen

Um diesen Limes (von Fkt.!) sauber durchführen zu können, wiederholen wir

1.4 DEF (Limes von Fkt auf Intervallen; Spezialfall von [2] 1.21)

(damit automatisch BP, [1] 3.28(i))

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ und sei $\xi \in I$

Wir schreiben
$$\lim_{x\to\xi} f(x) = c,$$

$c \in \mathbb{R}$, aber auch $\pm\infty$

falls für jede Folge $(x_n)_n$ in I mit $x_n \to \xi$ gilt, dass $f(x_n) \to c$.

1.5 BEM (Technisches Detail) Wir haben in 1.1(iv) gesehen, dass im Differenzenquotienten $x = \xi$ sinnlos ist und diesen Fall daher auch in Def 1.2 ausgeschlossen. Andererseits erlaubt Def 1.4 explizit auch die Folge $x_n = \xi$ $\forall n$ [konvergiert ja trivialerweise, vgl. [1] 2.11(i)].

Daher müssen wir im Folgenden bei $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ immer die konstante Folge $x_n = \xi$ explizit verbieten und schreiben $\lim\limits_{x\neq\xi,\, x\to\xi}$ oder $\lim\limits_{\xi\neq x\to\xi}$.

Warnung: Manche Quellen [z.B. Heuser] verbieten in der Def für Konvergenz von Funktionen $x_n = \xi$. Dann muß bei der Differenzierbarkeit $x_n = \xi$ nicht ausgeschlossen werden. Dafür sind einige Details im Zusammenhang mit Limiten von Fkt anders zu handhaben. Jetzt aber los!

Schlüssel-Def

1.6 DEF (Differenzierbarkeit & Ableitung)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine reelle Fkt.

(i) Sei $\xi \in I$. Die Fkt f heißt differenzierbar an der Stelle ξ [diffbar in ξ], falls

$$\lim_{\substack{x\to\xi\\ x\neq\xi}} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \quad \text{oder, was dasselbe ist,} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$$

existiert und endlich ist. [d.h. kein uneigentl. Grenzwert erlaubt!] Diesen Grenzwert nennen wir die Ableitung von f in ξ und schreiben

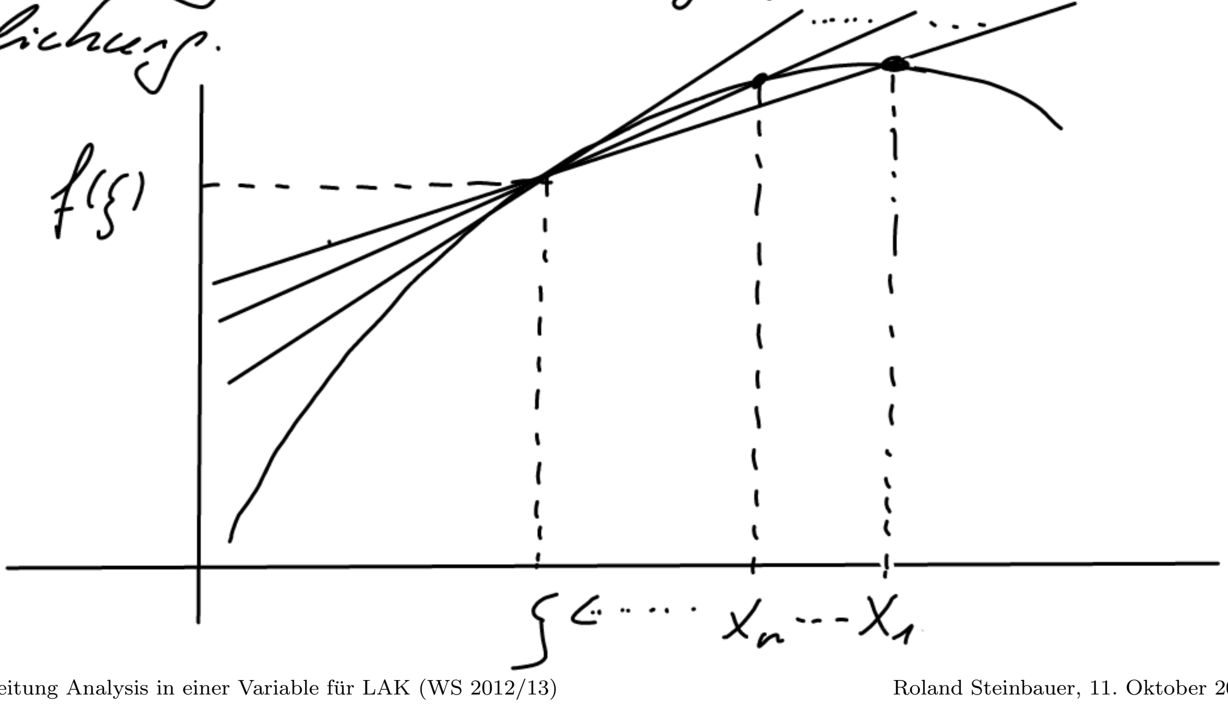
$$f'(\xi).$$

(ii) Ist f differenzierbar in allen Punkten $\xi \in I$, dann heißt f differenzierbar auf I oder einfach differenzierbar.

1.7 BEM (Zur Bedeutung von Def 1.6 & einseitige Ableitung)

(i) Falls der Limes in 1.6 (i) existiert und endlich ist, gilt tatsächlich wie in 1.1 (iii) antizipiert, dass die Ableitung (an der Stelle ξ) gleich dem Limes des Differenzenquotienten (an der Stelle ξ) ist.

Geometrisch ergibt sich die Ableitung also als der Grenzwert der Sekantensteigungen und kann somit als die Steigung der Tangente im Punkt ξ an den Graphen von f interpretiert werden. Zu dieser Lösung des sog. Tangentenproblems unten [1.10] mehr. Jetzt noch eine graphische Veranschaulichung.



(ii) Bisher haben wir suggestiv immer $x > \xi$ gezeichnet. Das dient aber nur der Veranschaulichung. Klarerweise sind in der Def 1.6 (i) resp 1.4 auch Folgen erlaubt, die von links/unten gegen ξ konvergieren – ebenso wie Folgen die „hin- und herspringen".

$$x_2 \; x_4 \cdots \xi \cdots x_3 \; x_1$$

[Nach Def 1.4 & 1.6 sind alle Folgen $(x_n)_n$ in I erlaubt mit $x_n \neq \xi$, $\forall n$ und $x_n \to \xi$]

(iii) Ist I ein (wenigstens halb-) abgeschlossenes Intervall und ξ ein Randpkt von I, dann kommen nur Folgen in Frage die von oben bzw unten gegen I konvergieren. Man spricht dann von einseitigen Ableitungen. Natürlich können solche auch für innere Pkte eines beliebigen Intervalls betrachtet werden.

1.8 BSP (Höchste Zeit: Diffbare & nichtdiffbare Fkt.)

(i) Konstante Fkt sind (überall) diffbar mit Abl $= 0$

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c \quad \forall x$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

(ii) Potenzfkt sind diffbar. Sei $c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \ni n \geq 1$.

Wir betrachten $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx^n$

Es gilt

$$\underline{f'(x)} = \lim_{0\neq h\to 0} \frac{c(x+h)^n - cx^n}{h} = c \lim_{0\neq h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\stackrel{(BLS)}{=} c \lim_{0\neq h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h}$$

$$= c \lim \frac{x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n}{h}$$

$$= c \lim \frac{h}{h} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k} \right)$$

$$= c \lim \left(\underbrace{\binom{n}{1}}_{= n} x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{h^{k-1}}_{\to 0} x^{n-k} \right)$$

$$= \underline{\overline{c n x^{n-1}}},$$

Insbesondere gilt also

- (Geraden) $f(x) = cx$, $f'(x) = cx^0 = c$
- $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

(iii) $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ ist überall differenzierbar und $\underline{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$

dh auf dem ganzen Defber. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Tatsächlich gilt

$$\lim_{0\neq h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{0\neq h\to 0} \frac{1}{h} \frac{x-(x+h)}{x(x+h)}$$

$$= \lim_{0\neq h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

(iv) Die Exponentialfkt ist auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar und gleich ihrer Ableitung, denn $\boxed{\exp' = \exp}$

$$\lim_{0\neq h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} \overset{[1]\ 4.38}{=} \exp(x) \lim_{0\neq h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h}$$

$$\overset{[2]\ 3.8(viii)}{=} \exp(x).$$

(v) Die Winkelfkt sin & cos sind diffbar auf $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \sin'(x) &= \cos(x) \\ \cos'(x) &= -\sin(x). \end{aligned}}$$

Tatsächlich gilt für den Sinus

$$\lim_{0\neq h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \underset{[2]\ 3.17(iv)}{=} \lim \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}$$

$$= \lim \underbrace{\cos(x+h/2)}_{\substack{\cos \text{ stetig } [[2]\ 3.17(i)] \\ \to \cos(x)\ (h\to 0)}} \underbrace{\frac{\sin(h/2)}{h/2}}_{\to 1\ [[2]\ 3.17(vi)]}$$

$$\overset{[1]\ 2.23}{=} \lim \cos(x+h/2) \lim \frac{\sin(h/2)}{h/2} = \underline{\cos(x)}$$

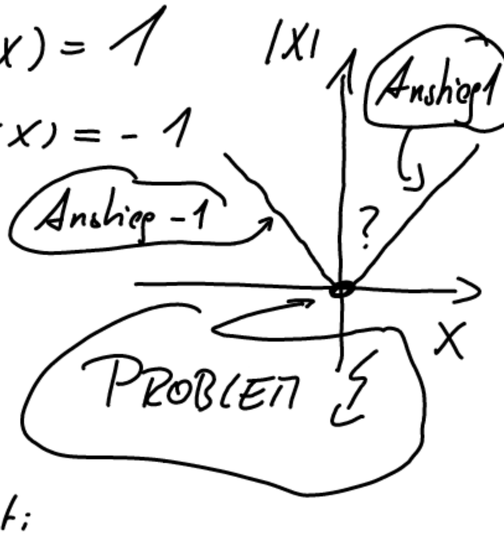
Der Cosinus-Fall lässt sich analog erledigen ⇝ [UE].

(vi) Der <u>Absolutbetrag</u> $\mathrm{abs}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist diff'bar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ aber <u>nicht diff'bar in $x=0$</u>

Tatsächlich gilt für

$x>0$: $\mathrm{abs} = \mathrm{id} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \mathrm{abs}'(x) = 1$

$x<0$: $\mathrm{abs} = -\mathrm{id} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} \mathrm{abs}'(x) = -1$



Aber $\mathrm{abs}'(0)$ existiert nicht, denn sei $h_n = (-1)^n/n$, dann gilt $h_n \to 0$ aber die Folge der Differenzenquotienten konvergiert nicht:

$$\frac{|0+h_n| - |0|}{h_n} = \frac{1/n}{(-1)^n\, 1/n} = (-1)^n \ \text{div} \ \left[\boxed{1}\ 2.11(iii)\right]$$

[Die Folge (h_n) ist natürlich so gewählt, dass sie abwechselnd Differenzenquotienten ± 1 produziert ...]

<u>1.8 BEM</u> ((Nicht)-diff'bare Fkt)

(i) Bemerke, dass abs in $x=0$ zwar <u>stetig</u> ist [$\boxed{2}$ 1.2(iv)] aber eben <u>nicht</u> <u>diff'bar</u>!

(ii) In gewisser Weise ist der <u>Knick</u> von abs bei $x=0$ ein <u>Prototyp</u> einer nicht-Differenzierbarkeit – etwa wie Sprünge Prototypen für Unstetigkeiten sind [vgl. $\boxed{2}$ 1.8(v) aber auch $\boxed{2}$ 1.15!] Aber auch hier ist die ganze Wahrheit komplizierter. Es gibt etwa Fkt, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig aber nirgends diffbar sind, z.B. die Weierstraß-Fkt $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin(2^k x)}{3^k}$. [Topologisch gesehen gibt es sogar viele solche Fkt – sie liegen dicht in den stetigen.]

(iii) Das „Problem" von abs bei $x=0$ läßt sich mittels einseitiger Ableitungen [1.7(iii)] genauer analysieren. Offensichtlich gilt

siehe [2] 1.24(i)

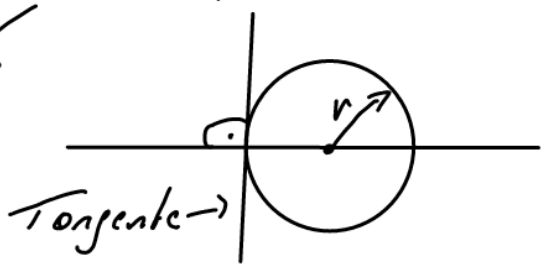
$$\lim_{h \searrow 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = 1, \quad \lim_{h \nearrow 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = -1,$$

sodass die einseitigen Ableitungen bei $x=0$ existieren und ± 1 ergeben.

1.10 BEM (Historische Bemerkung 1: Tangentenproblem)

Die grundlegende Problemstellung der Differentialrechnung war seit der Antike unter dem Namen Tangentenproblem bekannt: Finde die Tangente in einem Punkt an eine beliebige Kurve.

Dabei ist zunächst das Problem, wie überhaupt die Tangente an eine beliebige Kurve zu definieren ist, d.h. wie man von einfachen Spezialfällen wie z.B. den Kreis zu einer guten Verallgemeinerung gelangen soll/kann. Ein zunächst

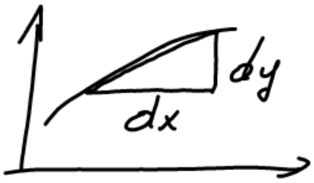


naheliegender Ansatz ist es, die Tangentensteigung durch die Sekantensteigungen anzunähern – also unsere Idee (*) aus 1.1(iii). Was wir in Def 1.6(i) locker mit dem Grenzwertbegriff erledigt haben, stellte die MathematikerInnen bis vor ~300 Jahren vor gewaltige technische Probleme.

Nach früheren Ansätzen von P. Fermat [~1600–1665] und R. Descartes [1596–1650] gelang es Ende des 17. Jh. unabhängig voneinander Gottfried Wilhelm Leibniz [1646–1716] und Isaac Newton [1643–1727] funktionierende Kalküle zu entwickeln.

Für Leibniz war dabei die Tangentensteigung die Steigung der Hypothenuse in einem „unendlich kleinen" Dreieck, das sich im Grenzfall aus den Sekantendreiecken ergibt. Tatsächlich rechneten die MathematikerInnen bis weit ins 19. Jahrhundert mit solchen, schwer fassbaren „unendlich kleinen Größen," ehe der moderne Grenzwertbegriff geprägt wurde. Aus dieser Anfangszeit der Differentialrechnung hat bis heute eine Schreibweise überlebt: Bezeichnen wir eine Funktion mit y (wie früher oft üblich), etwa $y = x^3 + 2x^2 + 7$, dann schreibt man für die Ableitung statt y' auch manchmal

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x.$$



„infinitesimales Dreieck"

Leibniz hat sich dabei $\frac{dy}{dx}$ wohl wirklich als den Quotienten aus Gegenkathete (dy) und Ankathete (dx) vorgestellt, wobei dx und dy „unendlich klein" sind.

Der moderne Grenzwertbegriff erspart es uns mit diesen, eine gewisse „richtige" Anschauung voraussetzenden „unendlich kleinen Größen" hantieren zu müssen. Es gibt aber auch einen um die Mitte des 20. Jh. von A. Robinson [1918-74] u.a. entwickelten Zugang zur Analysis, der einen rigorosen Umgang mit „unendlich kleinen" (und „unendlich großen") Größen ermöglicht. Dieses math. Teilgebiet heißt <u>Nichtstandard Analysis</u>.

<u>1.11 BEM</u> (Historische Bem 2: Newtonsche Mechanik)

Isaac Newton ging einen etwas anderen Weg als Leibniz. In seinem Hauptwerk, der „Principia Mathematica" – einem der einflussreichsten Bücher überhaupt – hat er gezeigt, dass wesentliche Phänomene in der Natur erfolgreich durch math. Modelle beschrieben werden können. Dazu entwickelte er eine Differential- und Integralrechnung, wobei er vom Problem der