1	
2	
3	
4	
G	

Vorname:
Familienname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Note:

Prüfung zu

Funktionalanalysis 1

Wintersemester 2007/08, Roland Steinbauer

2. Termin, 7.3.2008

1. *Operatoren und Funktionale*
   Seien E, F normierte Vektorräume und $T \in \mathrm{L}(E, F)$.

   (a) *Operatornorm*
   Zeige, dass die Operatornorm $\|T\|$ von T die kleinste Konstante ist, sodass
   $$\|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\| \qquad \forall x \in E$$
   gilt. (2 Punkte)

   (b) *Funktionale auf* L^p
   Sei I ein Intervall, $p \in [1, \infty]$ und $1/p + 1/q = 1$. Zeige, dass jede $L^q(I)$-Funktion ein lineares stetiges Funktional auf $L^p(I)$ definiert.
   Beantworte die folgenden Fragen (ohne Beweis): Was ist die Norm obigen Funktionals? Gibt es noch weitere lineare Funktionale auf L^p; mit anderen Worten, was ist der Dualraum des $L^p(I)$? (3 Punkte)

   (c) *Vollständigkeit von* $L(E, F)$
   Zeige, falls F ein Banachraum ist, so auch $L(E, F)$. Gilt auch die Umkehrung? (5 Punkte)

2. *Hilberträume*

   (a) *Orthogonalprojektion*
   Wie ist die Orthogonalprojektion P_M in Hilberträumen definiert?
   Es gilt, dass $(x - P_M x) \perp M$ erfüllt. Zeige, dass $P_M x$ dadurch eindeutig bestimmt ist. (3 Punkte)

   (b) *Entwicklungssatz*
   Sei $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ abzählbare Orthonormalbasis im Hilbertraum H. Zeige, dass dann für jeden Vektor $x \in H$
   $$x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x | e_i \rangle \, e_i$$
   gilt. (4 Punkte)

(c) *Orthonormalbasen*
Sei $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ abzählbares Orthonormalsystem im Hilbertraum H. Die Bedingung in (b) charakterisiert sogar die Eigenschaft von $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ Orthonormalbasis zu sein. Gib midestens 3 weitere äquivalente Bedingungen an. (3 Punkte)

3. *Hauptsätze der Funktionalanalysis*

   (a) *Reichhaltigkeit von E'*
   Zeige, dass der Dualraum E' die Punkte des normierten Vektorraums E trennt und insbesondere nicht-trivial ist. (was bedeutet das jeweils genau?) (3 Punkte)

   (b) *Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit*
   Formuliere und beweise den Satz von Banach-Steinhaus. (5 Punkte)

   (c) *Graphennorm*
   Sei $T : E \supseteq D \to F$ eine abgeschlossener Operator und seien E, F Banachräume. Definiere die Graphennorm $|||\quad|||$ auf D und zeige, dass $T : (D, |||\quad|||) \to F$ stetig ist. (2 Punkte)

4. *Beispiele*
   Gib jeweils ein Beispiel an und begründe kurz, dass es die geforderten Eigenschaften hat. (Jeweils 2 Punkte)

   (a) Ein unbeschränkter linearer Operator zwischen normierten Vektorräumen.

   (b) Ein nicht separabler normierter Vektorraum.

   (c) Ein reflexiver normierter Vektorraum.

   (d) Ein abgeschlossener Operator zwischen normierten Vektorräumen.

   (e) Einen Isomorphismus zwischen Banachräumen mit unbeschränktem inversen Operator.