1	
2	
3	
4	
G	

Vorname:
Familienname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

Note:

Prüfung zu

Funktionalanalysis 1

Wintersemester 2007/08, Roland Steinbauer

1. Termin, 1.2.2008

1. *Operatoren und Funktionale*

   (a) *Operatornorm*
   Die Operatornorm von T kann auf 3 Arten mittels Suprema über $\|Tx\|$ gewonnen werden. Gib diese an und beweise ihre Äquivalenz. (3 Punkte)

   (b) *Unstetige Operatoren*
   Gib ein Beispiel eines unstetigen/unbeschränkten linearen Operators an. Können dabei E bzw. F endlichdimensional gewählt werden? (3 Punkte)

   (c) *Dualraum des l^p*
   Wie sieht der Dualraum des l^p für $p \in [1, \infty]$ aus? Um den Beweis des enstprechenden Resultats zu skizzieren, gib die relevante Abbildungsvorschrift an und diskutiere kurz ihre Eigenschaften in den entsprechenden Fällen. Behandle die Isometrie und Surjektivität nur im Falle $p = 1$. (4 Punkte)

2. *Hilberträume*

   (a) *Projektionen*
   Zeige, dass für jeden Projektionsoperator P im normierten Vektorraum E gilt: $\|P\| \geq 1$ oder $P = 0$. Wie sieht die Situation aus, falls P_M die Orthogonalprojektion auf den abgeschlossenen Teilraum M im Hilbertraum H ist? Beweise das entsprechende Resultat. (3 Punkte)

   (b) *Projektionssatz*
   Formuliere den Projektionssatz für einen Teilraum M eines Hilbertraumes H und beantworte die folgenden Fragen aus seinem Umfeld. Was geht schief, falls M nicht abgeschlossen ist? Falls A nur (beliebiger) Teilraum oder gar nur Teilmenge von H ist, was läßt sich dann über $A^{\perp\perp}$ sagen (mit Beweis)? (4 Punkte)

(c) *Orthonormalsysteme*
Sei $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ abzählbares Orthonormalsystem im Hilbertraum H und $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Zeige, dass dann

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e_i \quad \text{konvergiert in } H \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = (\lambda_i)_i \in l^2$$

gilt. Was läßt sich im Falle der Konvergenz über die Normen von $x = \sum^{\infty} \lambda_i e_i$ und λ sagen (Beweis!)? (3 Punkte)

3. *Hauptsätze der Funktionalanalysis*

   (a) *Satz von Hahn-Banach*
   Formuliere den Fortsetzungssatz von Hahn-Banach, skizziere (kurz) seinen Beweis und dsikutiere (ebenfalls kurz) seine Bedeutung und seine Anwendungen (4 Punkte)

   (b) *Bidualraum*
   Sei E normierter Vektorraum. Definiere den Bidualraum sowie die kanonische Einbettung. Zeige, dass diese eine lineare Isometrie ist. (3 Punkte)

   (c) *Offene Abbildungen*
   Definiere den Begriff ,,offene Abbildung". Zeige, dass ein offener Operator zwischen normierten Vektorräumen surjektiv ist. Gilt auch die Umkehrung? (3 Punkte)

4. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung. (Je 2 Punkte)

   (a) Jede lineare Isometrie zwischen normierten Vektorräumen ist injektiv.

   (b) Ein stetiger Operator $T : E \to F$ ist immer auch abgeschlossen.

   (c) l^p mit $p \in [1, \infty]$ ist separabel.

   (d) $(c_0)' \cong l^\infty$.

   (e) l^1 ist nicht reflexiv.