Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1
2
3
4
G

Note:

Einführung in das mathematische Arbeiten

Roland Steinbauer, Wintersemester 2004/05

6. Prüfungstermin (15.4.2005)

1. *(Kurvendiskussion)* Die Funktion f hat ihren (einzigen) Wendepunkt auf der x-Achse und ihre erste Ableitung lautet
$$f'(x) = x - \frac{x^2}{6}.$$
   (a) Bestimme die Funktionsgleichung von f. (3 Punkte)
   (b) Bestimme Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von f. (3 Punkte)
   (c) Skizziere den Graphen von f im Intervall $[-3, 9]$. (1 Punkt)
   (d) Berechne den Inhalt des Flächenstücks, dass der Graph von f mit der x-Achse einschließt. (3 Punkte)

2. (a) (Trigonometrie) Von einem Dreieck in der Ebene sind zwei Seitenlängen $b = 5$ und $c = 8$, sowie der Winkel zwischen diesen beiden Seiten $\alpha = \pi/6$ bekannt. Berechne die Länge der 3. Seite a, die fehlenden Winkel β und γ, sowie Fläche und Umkreisradius. (5 Punkte)
   (b) *(Analytische Geometrie)* Berechne die Schnittpunkte des Kreises k mit Mittelpunkt $M = (-3, 1)$ und Radius $r = \sqrt{50}$ mit der Geraden $g : x + y = 10$. (3 Punkte)
   Ermittle die beiden Tangenten an k, die parallel zu g liegen (Skizze!) (2 Punkte)

3. *(Binomialkoeffizienten)*
   (a) Gib die rekursive Definition des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ an. Was verstehen wir allgemein unter einer rekursiven Definition? (3 Punkte)
   (b) Formuliere den Binomischen Lehrsatz. (2 Punkte)
   (c) Berechne $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. (2 Punkte)

4. (a) *(Algebra)* Für $r, s \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$\circ : \ (r, s) \mapsto r + s - \sqrt{2}.$$

Bildet $(\mathbb{Q}, \circ)$ eine ablesche Gruppe? (5 Punkte)

(b) *(Abbildungen)* Gegeben seien die Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Beweise

i. f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv. (3 Punkte)

ii. f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv. (3 Punkte)

(c) *(Bild und Urbild)* Sei $f : A \to B$ eine Funktion, $M \subseteq A$ und $N \subseteq B$. Definiere das Bild $f(M)$ von M unter f sowie das Urbild $f^{-1}(N)$ von N unter f.