Familienname:	**1**
Vorname:	**2**
Matrikelnummer:	**3**
Studienkennzahl(en):	**4**
	G

Note:

Einführung in das mathematische Arbeiten

Roland Steinbauer, Wintersemester 2004/05

4. Prüfungstermin (14.1.2005)

1. *(Kurvendiskussion)* Gegeben seien die beiden Funktionen f und $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 5(x^2 - 2x - 15), \qquad g(x) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Die Graphen beider Funktionen schneiden sich auf der x-Achse. Im rechten der Schnittpunkte fallen die Tangenten beider Kurven zusammen.

(a) Bestimme die Funktionsgleichung von g. (4 Punkte)

(b) Bestimme Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte sowie Wendepunkte von g. (4 Punkte)

(c) Skizziere die Graphen von f und g im Intervall $[-3.5, 5.5]$ und bestimme die Fläche, die von beiden Funktionsgraphen eingeschlossen wird. (3 Punkte)

2. *(Analytische Geometrie)* Gegeben seien die beiden Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die beiden Geraden einander schneiden. (2 Punkte)

(b) Der Schnittpunkt S von g und h sei die Spitze eines Tetraeders, dessen Grundfläche durch das Dreieck ABC mit $A = (-4, -9, 1)$, $B = (3, 3, -1)$ und $C = (6, -1, -3)$ gegeben ist. Skizziere den Tetraeder. (1 Punkt)

(c) Berechne den Neigungswinkel der Kante AS gegen die Grundfläche ABC. (3 Punkte)

(d) Berechne die Koordinaten des Punktes S', der durch Spiegelung des Punktes S an der Ebene ABC hervorgeht. (3 Punkte)

3. *(Zahlenmengen, Ordnungsvollständigkeit)*

   (a) Beweise die Aussage: Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational. (5 Punkte)

   (b) Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Definiere den Begriff der Ordnungsvollständigkeit (Def. 6.4.1 oder eine der äquivalenten Bedingungen in Prop. 6.4.2). (2 Punkte)

   (c) Diskutiere in eigenen Worten den „springenden Punkt" bei der Erweiterung der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ zur Menge $\mathbb{R}$. (3 Punkte)

4. (a) *(Absolutbetrag)*

   - Sei $x \in \mathbb{R}$. Definiere $|x|$. (1 Punkt)
   - Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige die Ungleichung

   $$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

   (4 Punkte)

   (b) *(Induktion)* Beweise mittels vollständiger Induktion für $x \neq 1$ und $1 \leq n \in \mathbb{N}$

   $$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

   Wird die Voraussetzung $x \neq 1$ wirklich benötigt; wenn ja, wo? (5 Punkte)