

# Aufgabensammlung zur Vorlesung

## Einführung in das mathematische Arbeiten

Zusammengestellt von  
T. Eisenkölbl, M. Fulmek, W. Huyer, M. Kunzinger,  
H. Massold, P. Raith, H. Schichl und R. Steinbauer

Wintersemester 2003/04

Dieses Skriptum enthält Übungsaufgaben zur Vorlesung *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Diese findet geblockt am Anfang des Semesters („Studieneingangsphase“, 1.10.—21.10.2003) statt und wird in diesem Zeitraum von den Proseminaren zu den AnfängerInnenvorlesungen *Proseminar zu Analysis 1* und *Proseminar zu Lineare Algebra und Geometrie 1* begleitet. Dementsprechend zerfällt dieses Skriptum in die beiden Teile „Analysis“ und „Lineare Algebra und Geometrie“. Die entsprechenden Beispiele bilden so den Stoff des jeweiligen Proseminars in der „Studieneingangsphase“.

Die hier zusammengestellten Beispiele dienen der eigenständigen Erarbeitung und Vertiefung des Stoffes aus der Vorlesung, sowie wichtiger Aspekte des Schulstoffs. Sie entfalten ihre volle positive Wirkung nur dann, wenn sie *selbständig* bearbeitet bzw. gelöst werden! In den Proseminaren, die mit der Vorlesung inhaltlich eine untrennbare Einheit bilden, werden die Aufgaben dann von Studierenden vorgetragen und diskutiert.

Über den genauen Ablauf der Proseminare informieren Sie sich bitte im entsprechende Informationsblatt.

Die so wie dieser Text grau hinterlegten Beispiele behandeln Themen, die über den Schulstoff hinaus gehen. Sollten Sie bei *anderen* Beispielen Schwierigkeiten haben, so nehmen Sie das bitte zum Anlass, die entsprechenden Abschnitte in Ihren Schulbüchern nochmals sorgfältig zu wiederholen — besser noch besuchen Sie die (entsprechenden Einheiten der) „Workshops zur Aufarbeitung des Schulstoffs“, die parallel zur Vorlesung angeboten werden.

Weitere Informationen zur Studieneingangsphase im Wintersemester 2003/04 finden Sie im Internet unter <http://www.mat.univie.ac.at/ws0304>.

R. Steinbauer, September 2003

# Analysis

## Elementare Funktionen, Trigonometrie

1. *Rechnen mit Potenzen und Logarithmen 1.* Wiederhole die Definition des Logarithmus sowie die Rechenregeln für Logarithmen und Potenzen (Schulstoff, 6. Klasse AHS) und berechne (ohne einen Taschenrechner zu verwenden):

- |  |                                  |
|--|----------------------------------|
| (a) $\log_2 16$ .                                    | (f) $4^{\log_2 5}$ .             |
| (b) $\log_{17} 289$ .                                | (g) $8^{\frac{1}{3} \log_2 3}$ . |
| (c) $2^x = 1024$ .                                   | (h) $e^{2 \log 7}$ .             |
| (d) $2^x = 7$ (verwende Logarithmen zur Basis 2).    | (i) $e^{4 \log x}$ .             |
| (e) $2^x = 7$ (verwende Logarithmen zur Basis $e$ ). | (j) $e^{7 \log 4x}$ .            |

*Hinweis:* Wir folgen hier der Konvention  $\log$  (ohne Basis) für den Logarithmus zur Basis  $e$  ( $e$ , die Eulersche Zahl) zu schreiben.

2. *Rechnen mit Potenzen und Logarithmen 2.*

- (a) Löse die Gleichung:  $5^{x+1} - 5^{x-2} = 124$ .  
 (b) Löse das Gleichungssystem:  $4^x 2^y = 128$ ,  $7^{x-y} = 49$ .

3. *Textaufgabe (Radiokativer Zerfall).* Die Atomkerne einiger chemischer Elemente (Uran, Plutonium) zerfallen spontan. Die Zeit  $\tau$ , in der von einer bestimmten Stoffmenge die Hälfte zerfällt heißt *Halbwertszeit*. (Sie kann einige Sekundenbruchteile ( $\text{Pt}^{212}$ ) oder etliche Milliarden Jahre ( $\text{U}^{238}$ ) betragen.) Obwohl für keinen einzigen instabilen Atomkern vorausgesagt werden kann, wann genau er zerfällt, gilt für eine genügend große Menge von instabilen Kernen ein exponentielles *Zerfallsgesetz*

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t}$$

wobei  $N(t)$  die Anzahl der zum Zeitpunkt  $t$  vorhandenen Kerne bezeichnet und  $t = 0$  als Anfangszeitpunkt festgelegt. Schließlich ist  $\lambda$  die von der Substanz abhängige *Zerfallskonstante*.

- (a) Zeige, dass die Halbwertszeit unabhängig von der Anfangsmenge der radiokativen Substanz ist.  
 (b) Drücke die Zerfallskonstante  $\lambda$  durch die Halbwertszeit  $\tau$  aus.  
 (c) Das bei Atombombenversuchen freigesetzte Kobaltisotop hat eine Halbwertszeit von 5.3 Jahren. Berechne nach wievielen Jahren nur mehr 10% bzw. 1% der ursprünglich freigesetzten Menge vorhanden ist.

4. *Sinus und Cosinus.* Wiederhole die Definition der Winkelfunktionen (Schulstoff, 6. Klasse AHS), und ihre Funktionsgraphen.
- (a) Bestimme alle reellen  $x$ , für die  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  gilt.
  - (b) Bestimme alle  $x \in [0, 2\pi]$ , für die  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  gilt.
  - (c) Bestimme alle  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , für die  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  gilt.
  - (d) Bestimme alle  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ , für die  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  gilt.
  - (e) Bestimme alle  $x \in [0, \pi]$ , für die  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  gilt.
  - (f) Bestimme alle  $x \in [-\pi, 0]$ , für die  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  gilt.
  - (g) Bestimme alle  $x \in [-2\pi, 0]$ , für die  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  gilt.
  - (h) Bestimme alle  $x \in [6\pi, \frac{13\pi}{2}]$ , für die  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  gilt.
5. *Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck.* Der Wiener Rathausturm wirft auf den vor ihm liegenden waagrechten Platz einen 136,6 m langen Schatten. Die Sonnenstrahlen schließen zu diesem Zeitpunkt mit dem Erdboden einen Winkel von  $36,27^\circ$  ein. Wie hoch ist der Rathausturm?

### Summen- und Produktzeichen, Induktion

6. *Summen- und Produktschreibweise 1.* Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung der Summen- bzw. Produktzeichen an:

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| (a) $\sum_{k=3}^{11} 2^{2k+1}$ | (e) $\prod_{i=1}^5 k^i$                      |
| (b) $\sum_{k=-4}^3 b_k$        | (f) $\prod_{l=1}^4 l^i$                      |
| (c) $\sum_{k=0}^n e^{k+1}$     | (g) $\sum_{j=2}^4 \prod_{k=1}^3 jk + 2$      |
| (d) $\prod_{j=2}^6 k^2$        | (h) $\sum_{k=0}^m \sum_{j=0}^m \binom{k}{j}$ |

7. *Summen- und Produktschreibweise 2.* Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen:

- (a)  $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$
- (b)  $b_1 + b_3 + b_5 + b_7 + b_9$
- (c)  $e^8 + 2e^{12} + 4e^{16} + 8e^{20} + 16e^{24} + 32e^{28} + 64e^{32}$
- (d)  $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \dots (2n)$
- (e)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$
- (f)  $a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 2a_1^2 + 6a_2^2 + 10a_3^2 + 4a_1^3 + 12a_2^3 + 20a_3^3 + 8a_1^4 + 24a_2^4 + 40a_3^4$

8. *Vollständige Induktion.* Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle angegebenen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ :

$$(a) \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$(c) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

9. *Summen- und Produktschreibweise 3.* Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen gelten. Sollten Sie in einer Gleichung einen Fehler finden, so stellen Sie die rechte Seite richtig.

$$(a) \sum_{i=1}^5 a_i = \sum_{j=3}^7 a_{j+2}$$

$$(b) \sum_{k=1}^n p_{2k+1} = \sum_{j=-n+1}^0 p_{1-2j}$$

$$(c) \sum_{t \in \{9,16,25,36,49\}} m_t^j = \sum_{p=2}^6 m_i^{(p+1)^2}$$

$$(d) \sum_{k=0}^n x^{2k+1} = \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{(-1)^j - 1}{2} x^j$$

$$(e) \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{2k+1}$$

$$(f) \sum_{j=0}^n k^{2j} = \sum_{r=0}^{2n} k^r - \sum_{s=0}^n k^{2s+1}$$

$$(g) \log \prod_{i=0}^n 3^{a_i} = \log 3 \sum_{j=0}^n a_j$$

$$(h) \prod_{j=0}^n j(n-j) p^{\frac{1}{2}j(n-j)} = \sqrt{\prod_{k=1}^{m-1} k(m-k) p^{k(m-k)}}$$

$$(i) \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a^j b^{k-j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a^j b^{k-j}$$

10. *Bernoullische Ungleichung.* Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{für } x \geq -1 \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

### Mengen, Relationen

11. *Mengenoperationen 1.* Beweisen Sie

- (a) eines der Verschmelzungsgesetze und
- (b) eines der De Morgan-Gesetze

aus Theorem 3.3.12. Verwenden Sie für einen der beiden Beweise die Mengentafel, für den anderen die Definitionen der Mengenoperationen und Theorem 3.1.6 (wie im Beweis des Distributivgesetzes im Skriptum).

12. *Mengenoperationen 2.* Seien  $A$  und  $B$  Mengen. Zeigen Sie:

- (a)  $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$  und  $A \cap B = A$
- (b)  $B \cup A = A \Leftrightarrow B \subset A$
- (c)  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

13. *Äquivalenzrelationen.*

- (a) Auf der Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen betrachten wir die Relation

$$x \equiv y \Leftrightarrow x - y \text{ gerade.}$$

Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

- (b) Bei einer Versuchsreihe betrachtet man 2 Messergebnisse als gleich, wenn sie sich um weniger als  $10^{-5}mm$  unterscheiden. Definiert dieser Gleichheitsbegriff eine Äquivalenzrelation?

14. *Ordnung und Schranken.* Betrachten wir  $\mathbb{R}$  mit der (natürlichen) Ordnung  $\leq$ . Gib für die folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$  obere und untere Schranken an, falls diese existieren. Handelt es sich dabei um Maxima resp. Minima? Sind die entsprechenden Mengen beschränkt?

- (a)  $[0, 4[$
- (b)  $(a, \infty)$
- (c)  $] -3, 2] \cup [4, 5]$
- (d)  $\mathbb{N}_g$ , die geraden natürlichen Zahlen.

## Differential- und Integralrechnung, Extremwertaufgaben

15. *Differenzieren 1.* Differenzieren Sie nach der angegebenen Variable:

(a)  $f(x) = \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{x + \sqrt{x}}$

(b)  $f(x) = \sqrt[5]{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

(c)  $f(y) = \sqrt{\frac{\sin y - 1}{\cos y + 1}}$

(d)  $x(z) = \sin(\tan z)$

(e)  $g(x) = \frac{c^x}{x^c}$

(f)  $g(c) = \frac{c^x}{x^c}$

(g)  $h(x) = x^x$

16. *Differenzieren 2.* Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen von:

(a)  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(b)  $f(x) = (x^3 - 2)^7$

17. *Kurvendiskussion.* Unter Diskussion des Graphen einer Funktion (Kurvendiskussion) verstehen wir die Bestimmung des (maximalen) Definitionsbereiches, der Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extremwerte, Monotonie, Wendepunkte und des Krümmungsverhaltens (im Fall der Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extremwerte und Wendepunkte, so vorhanden).

Diskutieren Sie die folgenden Funktionen und zeichnen Sie den Graphen.

(a)  $f(x) = \frac{(x - 3)^2}{4(x - 1)}$

(b)  $g(x) = \sin x + \cos x$

(c)  $h(x) = x \sin x$

(d)  $j(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

18. *Unbestimmte Integrale.* Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a)  $\int (4x + 3)^2 dx$

(b)  $\int e^{4+3x} dx$

(c)  $\int x^2 \cos x dx$

- (d)  $\int \cos x e^{\sin x} dx$   
(e)  $\int x^2 \log x dx$   
(f)  $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6} dx$   
(g)  $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} \quad (n > 1)$

19. *Bestimmte Integrale.* Berechnen Sie:

- (a)  $\int_1^2 \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$   
(b)  $\int_0^1 2^x dx$   
(c)  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x) dx$   
(d)  $\int_{x_1}^{x_2} (ax^2 + bx + c) dx$   
(e)  $\int_1^4 \frac{(1-2x)^2}{x^2} dx$   
(f)  $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^4+1} dx$   
(g)  $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$

20. *Integrieren.*

- (a) Weisen Sie folgende Formel (doppelte partielle Integration) nach:

$$\int f(x)g''(x) dx = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) + \int f''(x)g(x) dx.$$

- (b) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

- (c) Weisen Sie folgende Formel nach:

$$\int \sqrt{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{2}{3} f(x) \sqrt{f(x)} + C.$$

## Beispiele mit Mathematica

Die folgenden Aufgaben sind für die Bearbeitung mit Mathematica gedacht. Das benötigte Hintergrundwissen finden Sie in den entsprechenden Notebooks, d.h. alle Aufgaben sind mit den dort vorgestellten Befehlen und Methoden lösbar. Die genauen Abgabemodalitäten für diese Aufgaben werden im Proseminar bekanntgegeben.

21. *Rechnen mit Mathematica.* Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse der Aufgaben 1 (a),(b) und 1 (f)-(h) mit Mathematica.

22. *Vereinfachen rationaler Ausdrücke 1.* Betrachten Sie den rationalen Ausdruck

$$\frac{x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x}{x^4 + x^3 - x^2 - x}$$

und vereinfachen Sie ihn mit Hilfe von Mathematica zu

(a)  $\frac{-4+x^2}{-1+x^2}$  und

(b)  $\frac{(-2+x)(2+x)}{(-1+x)(1+x)}$ .

23. *Vereinfachen rationaler Ausdrücke 2.* Betrachten Sie den rationalen Ausdruck

$$r = 2 \frac{x^3 - x^2y - xy + y^2}{x^3 - x^2y - x + y}.$$

Vereinfachen Sie  $r$  mit Mathematica zu

(a)  $\frac{2(x^2-y)}{-1+x^2}$  bzw. zu

(b)  $\frac{2(x^2-y)}{(-1+x)(1+x)}$ .

24. *Wertetabelle und Plotten.* Erstellen Sie für die folgenden Paare von Funktionen eine Wertetabelle und stellen Sie beide Funktionen jeweils in einem Plot dar. Wählen Sie jeweils einen „vernünftigen“ Definitionsbereich.

(a)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $g(x) = \cos(x)$

(b)  $f(x) = x$ ,  $g(x) = e^x$

(c)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$

25. *Stückweise Definition von Funktionen.* Definieren und plotten Sie folgenden Funktionen  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $i = 1, 2$ ).

(a)  $f_1(x)$  habe auf dem Intervall  $(0, 1)$  den Funktionswert 1, sonst den Wert  $-1$

(b)  $f_2(x) := \begin{cases} \sin(x) & 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, \quad -1 \leq k \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

26. *Binomialkoeffizient.* Definieren Sie rekursiv eine Funktion  $\text{binom}(n, k)$ , die den Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  als Funktionswert hat. Überprüfen Sie die Korrektheit Ihrer Definition unter Zuhilfenahme der eingebauten Funktion **Binomial**.
27. *Gleichungen 1.* Lösen Sie die Gleichungen aus den Beispielen 1 (c), (d) mit Mathematica und vergleichen Sie die neue Ergebnisse mit Ihren damaligen Berechnungen. Setzen Sie Lösungen in die Gleichungen ein und überprüfen Sie so auch mit Mathematica Ihre Ergebnisse.
28. *Gleichungssysteme.* Lösen Sie mit Mathematica die linearen Gleichungssysteme aus dem Beispiel 1 aus dem Lineare-Algebra-Teil. Setzen Sie wiederum zur Probe die Lösungen in die Gleichungen ein. Beachten Sie, dass in zwei der vier Beispielen freie Parameter auftreten. Was passiert, wenn Sie diese Parameter Null setzen?
29. *Sinus.* Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse von Beispiel 4 mittels Mathematica.
30. *Lagrange Interpolation.* Finden Sie ein Polynom  $p$  vom Grad 5, dass die folgende Wertetabelle erfüllt.

$x$	$p(x)$
0	-5
1	-6
2	7
3	166
4	843
5	2770

*Hinweis:* Beginnen Sie mit dem folgenden Ansatz ( $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq 6$ )

$$\begin{aligned}
 p(x) &= a_1x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\
 &+ a_2x(x-1)(x-2)(x-3)(x-5) \\
 &+ a_3x(x-1)(x-2)(x-4)(x-5) \\
 &+ a_4x(x-1)(x-3)(x-4)(x-5) \\
 &+ a_5x(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \\
 &+ a_6(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5).
 \end{aligned}$$

(Jeder Summand ergibt sich durch Streichen eines der Faktoren im Produkt  $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ . Warum ist dieser Ansatz zielführend?) Benutzen Sie dann die Wertetabelle um die Koeffizienten  $a_i$  zu bestimmen.

*Zusatz:* Zeigen Sie (mit Papier und Bleistift, dh. *ohne* Mathematica, denn es wird Ihnen hier nicht viel helfen...), dass ein Polynom  $p$  vom Grad  $k - 1$ , das an den Stellen  $b_i$  die Werte  $a_i$  annimmt ( $1 \leq i \leq k$ ) wie folgt geschrieben werden kann

$$p(x) = \sum_{i=1}^k a_i \frac{1}{p_i(b_i)} p_i(x),$$

wobei

$$p_i(x) = \frac{\prod_{j=1}^k (x - a_j)}{x - a_i}.$$

(Man kann sogar beweisen, dass  $p$  das eindeutig bestimmte Polynom von minimalem Grad ist, dass die vorgegebene Wertetabelle erfüllt; dafür kann man zB. den Fundamentalsatz der Algebra bemühen...)

31. *Vermutung und Beweis:* Sie haben in Beispiel 8(b) mittels vollständiger Induktion bewiesen, dass die Summe der ersten  $n$  Kubikzahlen gleich  $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$  ist. Nun wie steht es mit der Summe der ersten  $n$  Quadrate oder der vierten Potenzen oder der fünften? Versuchen Sie mit Hilfe von Mathematica geschlossene Ausdrücke für diese Summen, genauer für

$$s(m, n) := \sum_{k=1}^n k^m$$

für  $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  zu finden. (Über die Verwendung des Befehls **Sum** machen Sie sich am besten in der Online-Hilfe schlau; er „funktioniert“ dankenswerter Weise analog dem Summenzeichen!) Konkret erledigen Sie die folgenden Aufgaben:

- Reproduzieren Sie die Formel aus Beispiel 11(b).
- Geben sie Formeln für die Summe der ersten  $n$  Potenzen der Ordnung  $m$  für  $0 \leq m \leq 10$  an.
- Beweisen Sie exemplarisch eine dieser Formeln mittels vollständiger Induktion. (Sie wissen schon, *ohne*...)

32. *Zusatzbeispiel für Wagemutige: Bernoullizahlen.* Betrachten Sie die Formeln aus Punkt (b) im vorigen Beispiel. Schreiben Sie Ausdrücke  $s(m, x)$  als polynomiale Ausdrücke in  $x$  an und versuchen Sie Muster in den Koeffizienten zu finden. Konkret versuchen Sie sich an folgenden Aufgaben:

- (a) Finden Sie geschlossene Ausdrücke für die Koeffizienten von
- $x^{m+1}$ ,
  - $x^m$  für  $m > 0$ ,
  - $x^{m-1}$  für  $m > 1$  und
  - $x^{m-2}$  für  $m > 2$ .
- (b) Der nächste Koeffizient ist etwas schwieriger zu extrahieren. Verwenden Sie die Methode aus Beispiel 30 um zu berechnen, dass der Koeffizient von  $x^{m-3}$  gleich  $\frac{-1}{720}m(m-1)(m-2)$  ist.
- (c) Setzen Sie nun Ihre bisherigen Ergebnisse zusammen, um eine Formel für  $s(m, n)$  anzuschreiben. Wenn Sie  $1/(m+1)$  herausheben, sollten Sie folgendes Ergebnis finden

$$s(m, x) = \frac{1}{m+1} \left( x^{m+1} + \frac{1}{2}(m+1)x^m + \frac{1}{12}(m+1)mx^{m-1} + 0(m+1)m(m-1)x^{m-2} - \frac{1}{720}(m+1)m(m-1)(m-2)x^{m-3} + \dots \right).$$

Wenn Sie diese Formel unter Verwendung von Binomialkoeffizienten umschreiben erhalten Sie (überprüfen Sie das!)

$$s(m, x) = \frac{1}{m+1} \left( \binom{m+1}{0} x^{m+1} + \frac{1}{2} \binom{m+1}{1} x^m + \frac{1}{6} \binom{m+1}{2} x^{m-1} + 0 \binom{m+1}{3} x^{m-2} - \frac{1}{30} \binom{m+1}{4} x^{m-3} + \dots \right).$$

Jetzt könnten Sie vermuten, dass der Koeffizient von  $x^{m+1-k}$  immer ein ganzzahliges Vielfaches von  $\frac{1}{m+1} \binom{m+1}{k}$  ist. Nun, dem ist wirklich so und diese „ganzzahligen Vielfachen“ lassen sich rekursiv angeben und sind als die *Bernoullizahlen*  $B_i$  bekannt. Es gilt  $B_0 = 1$ ,  $B_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} B_j$ . Die Bernoullizahlen treten in verschiedensten Zusammenhängen in der Mathematik und auch theoretischen Physik auf. Um 1690 schrieb ihr Entdecker der schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli (1654–1705) (und damit schließt sich der Kreis zum Beispiel 31):

„Mit der Hilfe dieser Formeln benötigte ich weniger als die Hälfte einer Viertelstunde um die zehnten Potenzen der ersten 1000 Zahlen zu addieren; ihre Summe ist: 914099242414242434242419242500.“

Wielange brauchen Sie mit Hilfe von Mathematica um diese Zahl auszurechnen?

# Lineare Algebra und Geometrie

## Gleichungen und Ungleichungen

1. *Lineare Gleichungssysteme.* Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme.

$$(a) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}, \text{ (konstant)}$$

$$(c) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 5a - 2b + 3c - 4d = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 3c - 2d = x \\ a + 6c = y \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}, \text{ (konstant)}$$

2. *Textaufgabe (Ohmsches Gesetz).* Nach dem Ohmschen Gesetz besteht zwischen Spannung  $U$ , Widerstand  $R$  und Stromstärke  $I$  eines elektrischen Leiters die Beziehung  $U = R \cdot I$ . An den Enden eines Leiters liegt die Spannung  $U = 220$  Volt. Wird der Widerstand  $R$  um 144 Ohm erhöht, so sinkt die Stromstärke um 1 Ampere. Wie groß ist der Widerstand des Leiters?

3. *Ungleichungen.* Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden (Systeme von) Ungleichungen.

$$(a) 2 - 3x < 2x + 3 \leq 3x - 4.$$

$$(b) x < x + 3 < 6 \leq 5x - 1.$$

$$(c) |x| \cdot |y| \leq 1.$$

$$(d) |x|^2 + |y - 1|^2 = 1.$$

$$(e) 2|x| + 3|y| \leq 1.$$

4. *Binomialkoeffizient.* Wiederholen Sie den Begriff des Binomialkoeffizienten und beweisen Sie die folgenden Identitäten.

$$(a) \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Verwenden Sie dabei die Darstellung des Binomialkoeffizienten aus Proposition 2.5.4, also  $\binom{n}{k} = n!/((n-k)!k!)$ .

$$(b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

$$(c) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

*Hinweis:* Während die Aufgabe a) durch „brute force“ gelöst werden kann, bewältigt man die Aufgaben b) und c) am einfachsten mit einem „Trick“: Formulieren Sie die rechten Seiten mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes!

## Mathematische Grundlagen, Logik

5. *Mathematische Ausdrucksweise 1.* Lesen Sie die folgende verunglückte Lösung zu dem angeführten Übungsbeispiel durch. Versuchen Sie, alle Unklarheiten und Ungeschicklichkeiten zu entdecken und produzieren Sie eine den mathematischen Gepflogenheiten und Schreibweisen entsprechende richtige Lösung:

*Zeigen Sie: Das Quadrat jeder ungeraden Zahl ist kongruent 1 modulo 4.*

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} n \text{ Quadrat} &\implies n^2 \\ (2n+1)^2 &= 4n^2 + 4n + 1 = \text{Rest } 1 \\ &\qquad\qquad\qquad \nearrow \\ &\text{modulo } 4 \end{aligned}$$

6. *Mathematische Ausdrucksweise 2.* Wie in der vorigen Aufgabe:

*Zeigen Sie: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Stelle gerade ist.*

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} &\implies a_n 10^n + \dots + a_1 10^1 + a_0 \quad \text{gerade} \\ &\implies a_0 \text{ gerade, da } 2|10 \\ &\iff 2|10 \quad a_0 = 2a'_0 \\ &\implies n = a_k 10^k + \dots + a_1 10^1 + a_0 \quad \text{gerade} \end{aligned}$$

7. *Indirekter Beweis 1.* Beweisen Sie:  $n^2$  ungerade  $\implies n$  ungerade.

8. *Indirekter Beweis 2.* Es gibt keine ganzen Zahlen  $n, m$  mit  $28m + 42n = 100$ .

9. *Verneinung.* Bilden Sie die Verneinung der folgenden Aussagen:

- (a) Alle Rosen sind verwelkt oder teuer.
- (b) Alle Rosen sind entweder verwelkt oder teuer.

*Hinweis:* Wir folgen hier der Konvention aus der Vorlesung, die Formulierung „entweder ... oder“ als *ausschließendes Oder* (genau eine der (beiden) Alternativen trifft zu) zu interpretieren. Die Formulierung „oder“ ist natürlich als das (mathematische) *einschließende Oder* (mindestens eine der (beiden) Alternative trifft zu) zu lesen. Falls Ihnen dieser Hinweis Kopfzerbrechen bereitet, dann wiederholen Sie schleunigst den entsprechenden Abschnitt aus der Vorlesung und suchen als Zusatzaufgabe ein Beispiel aus dem Alltagsleben, wo die Formulierung „entweder ... oder“ bedeutet, dass höchstens eine der (beiden) Alternative zutrifft, geben die Schaltwerttabelle der entsprechenden Operation an und vergleichen diese mit den Schaltwerttabellen der OR- und der XOR-Operation.

- c) Wenn zwei Ebenen einen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie nicht parallel.
- d) Es gibt Dreiecke, die genau zwei rechte Winkel haben.

10. *Äquivalente Aussagen.* Beweisen Sie die Äquivalenz

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

und formulieren Sie gemäß dieser Regel äquivalente Aussagen zu:

- (a)  $\forall n \in \mathbb{N}: n^4 \text{ ungerade} \Rightarrow n \text{ ungerade}$
- (b)  $\forall n \in \mathbb{N}: 4 \mid n \Rightarrow 2 \mid n$
- (c)  $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 > n \Rightarrow n > 1$

*Hinweis:* Das Zeichen „ $\mid$ “ bedeutet „teilt“.

11. *Rechenregeln.* Beweisen Sie eines der Distributivgesetze und eines der De Morganschen Gesetze aus Theorem 3.1.6.

12. *Logik 1.* Es seien  $p$ ,  $q$ , und  $r$  beliebige Aussagen. Sind dann die folgenden Aussagen wahr?
- (a)  $\neg(q \wedge (\neg q))$
  - (b)  $(\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
  - (c)  $((r \Rightarrow p) \wedge (\neg p)) \Rightarrow \neg r$
  - (d)  $(q \vee (q \Rightarrow p)) \Rightarrow p$
  - (e)  $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow q)$
13. *Logik 2.* Wir betrachten die Aussagen  $p$  und  $q$ . Es gelte  $p \Rightarrow q$ . Was läßt sich dann über die folgenden vier Aussagen sagen?
- (a)  $q \Rightarrow p$
  - (b)  $\neg p \Rightarrow \neg q$
  - (c)  $p \Rightarrow \neg q$
  - (d)  $\neg q \Rightarrow \neg p$
14. *Logik 3.* Begründen Sie, warum die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:
- (a)  $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x = y$
  - (b)  $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x = y$
  - (c)  $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x > y$
  - (d)  $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x \geq y$
  - (e)  $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$
  - (f)  $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{N} : x \geq y$
15. *Fallunterscheidungen.*
- (a) Zeigen Sie  $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$ .
  - (b) Zeigen Sie  $\frac{|x-y|+x+y}{2} = \max(x, y)$ .

## Analytische Geometrie

16. *Abstand 1.* Gegeben seien der Punkt  $P = (5, 4, 3)$  und die Gerade  $g : X = (9, 1, 3) + t(3, 4, -5)$  im Raum.
- (a) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalebene  $\varepsilon$  auf  $g$  durch  $P$ .
  - (b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von  $\varepsilon$  mit  $g$ .
  - (c) Berechnen Sie den Normalabstand des Punktes  $P$  von der Geraden  $g$ .

17. *Schnittpunkt/winkel.* Wo und unter welchem Winkel schneidet die Gerade  $g : X = (6, 3, -4) + t(2, 1, -2)$  die  $x$ - $y$ -Ebene ?
18. *Ebene.* Gegeben sind die beiden Geraden  $g : X = (1, 2, 1) + s(3, -4, 6)$  und  $h : X = (3, 0, -1) + t(6, -1, 0)$ . Berechnen Sie die Gleichung der Ebene, die die Gerade  $g$  enthält und zur Geraden  $h$  parallel ist.
19. *Parallelogramm im Raum.* Gegeben sind die Punkte  $A = (4, 1, 1)$ ,  $B = (2, 4, 5)$  und  $C = (-1, -2, 3)$ . Berechnen Sie den vierten Eckpunkt  $D$  des Parallelogramms  $ABCD$  sowie dessen Flächeninhalt.
20. *Abstand 2.* Zeigen Sie, dass die Geraden  $g : X = (1, 2, 3) + s(0, -1, 1)$  und  $h : X = (3, 2, 1) + t(1, 0, 1)$  windschief sind und berechnen Sie ihren Abstand.

### Abbildungen

21. *Bild und Urbild.* Wiederholen Sie die Definition des Bildes und des Urbildes einer Menge unter einer Abbildung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und die Mengen  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Bildmengen  $f_i(A_i)$  sowie die Urbildmengen  $f_i^{-1}(B_i)$ :
- (a)  $f_1(x) = x + 5$ ,  $A_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $B_1 = (-1, 1)$ ,
  - (b)  $f_2(x) = x^2 + 1$ ,  $A_2 = (-1, 1)$ ,  $B_2 = \{-1, 2\}$ ,
  - (c)  $f_3(x) = a$  ( $a \in \mathbb{R}$  konstant),  $A_3 = \{0\} \cup (1, 2)$ ,  $B_3 = \{a\}$ .
22. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 1.*
- (a) Sei  $f : A \rightarrow B$  eine Abbildung von der Menge  $A$  in die Menge  $B$ . Geben sie die (genauen(!)) Definitionen für Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von  $f$  an.
  - (b) Geben Sie jeweils eine injektive und nicht surjektive, eine surjektive und nicht injektive und eine bijektive Funktion von  $A$  nach  $B$  an, wobei  $A$  und  $B$  geeignete Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind.
23. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 2.* Sind die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (a)  $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto n^2$
  - (b)  $f_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n \mapsto n^2$
  - (c)  $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ (= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\})$ ,  $x \mapsto x^2 + 1$
  - (d)  $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_4(x) = 4x + 1$
  - (e)  $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $x \mapsto \sin x$

24. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 3.*

- (a) Gibt es zwei Funktionen  $f, g$ , die beide nicht bijektiv sind, sodass die Zusammensetzung  $f \circ g$  bijektiv ist?
- (b) Gibt es zwei Funktionen  $f, g$ , die beide nicht injektiv sind, sodass die Zusammensetzung  $f \circ g$  injektiv ist?

25. *Urbildmenge.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion, und seien  $A, B \subseteq Y$  Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen und geben Sie jeweils eine verbale Formulierung der Form: „Das Urbild des Durchschnitts zweier Mengen ist ...“ an.

(a)  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ ,

(b)  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ .

Falls Sie sich durch (b) nicht genügend herausgefordert fühlen, dann beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung für beliebige Vereinigungen

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i).$$

Hier ist  $I$  eine beliebige Indexmenge.

(c)  $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ .

*Hinweis:* Lassen Sie sich vom relativ hohen Abstraktionsgrad der Aufgabe nicht entmutigen! Gehen Sie formal vor und beginnen Sie zB. den Beweis von (a) mit der definitionsgemäßen Formulierung, dass  $x$  ein Element der linken Menge in der Gleichung ist, also  $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$ . Nun verwenden Sie die Definition für den Durchschnitt zweier Mengen ... na sehen Sie, nach einer weiteren Verwendung der Definition des Urbilds und des Durchschnitts haben wir gezeigt, dass  $x$  Element der rechten Seite der Gleichung ist, also die Gleichheit gilt!

26. *Bildmenge.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion, und seien  $A, B \subseteq X$  Teilmengen. Untersuchen Sie, welche Eigenschaften (injektiv, surjektiv, bijektiv) für  $f$  nötig sind, damit die nachstehenden Gleichungen erfüllt sind. Muss bzw. kann man das = durch  $\subseteq$  oder  $\supseteq$  ersetzen, damit die Beziehung auch für allgemeine  $f$  gilt? Geben Sie schließlich—wie im obigen Beispiel—eine verbale Formulierungen für jede der Eigenschaften an.

(a)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ,

(b)  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

Analog zu (b) im vorigen Beispiel gilt hier die Verallgemeinerung auf beliebige Durchschnitte unter denselben Voraussetzungen wie (b) selbst. Na, motiviert für einen Versuch?

(c)  $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ .

## Komplexe Zahlen

27. *Rechnen mit komplexen Zahlen 1.* Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen  $|z|$ ,  $\arg z$ ,  $1/z$ ,  $\sqrt{z}$ .

(a)  $z = 3 + 2i$ ,

(b)  $z = 2 - 4i$ ,

(c)  $z = -i$ ,

(d)  $z = 1 - i$ .

28. *Rechnen mit komplexen Zahlen 2.* Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form  $a + bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ :

(a)  $\frac{1+i}{7-i}$ ,

(b)  $\left| \frac{2-6i}{3+8i} \right|$ ,

(c)  $(9+6i)^4$ ,

(d)  $i^{101}$ ,

(e)  $\sum_{n=1}^{1234} i^n$ .

29. *Rechnen mit komplexen Zahlen 3.*

(a) Multiplizieren Sie  $3 + \frac{4}{3}i$  mit  $-2 + \frac{i}{2}$ . Wie sieht das in der komplexen Zahlenebene aus?

(b) Was ist in  $\mathbb{C}$  das Inverse zu  $\frac{7}{2} - \frac{2}{4}i$ ?

30. *Komplexe Nullstellen von Polynomen.* Bestimmen Sie alle (auch die komplexen) Nullstellen der Polynome

(a)  $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ ,

(b)  $p(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$ ,

(c)  $p(z) = z^2 - (1+i)z + i$ ,

(d)  $p(z) = z^4 - (2-i)z^3 + (3-2i)z^2 - (4-i)z + 2$ .

31. *Lineares Gleichungssystem über  $\mathbb{C}$ .* Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über dem Körper der komplexen Zahlen:

$$\frac{1}{i}x + (2+i)y = 0$$

$$2x - (1-i)y = 2.$$

Gruppen, Ringe, Körper

32. *Eindeutigkeit des Inversen in eine Gruppe.* Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe. Beweisen Sie, dass für alle  $g \in G$  das inverse Element  $g^{-1}$  eindeutig bestimmt ist.

33. *Polynomdivision.* Teilen Sie jeweils das Polynom  $p$  durch das Polynom  $q$

(a)  $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1, q(x) = x^2 + 1$

(b)  $p(x) = x^6 - 9x^5 + 22x^4 - 41x^3 + 17x^2 - 4x + 8, q(x) = x^2 - 2x + 5$

34. *Restklassen.* Berechnen Sie

(a)  $2 + 4 \pmod{5},$

(b)  $5 - 6 \pmod{6},$

(c)  $5 \cdot 3 \pmod{13},$

(d)  $4^{807} \pmod{9},$

35. *Einheitswurzeln.* Zeigen Sie, dass die drei komplexen Lösungen der Gleichung  $x^3 = 1$  eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen bilden. Vergleichen Sie ihre Multiplikationstabelle mit derjenigen der additiven Gruppe  $\mathbb{Z}_3$ .

36.  $S^1$ . Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen  $c$  mit  $|c| = 1$  bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen eine Gruppe bilden; diese wird mit  $S^1$  bezeichnet. Kann man 1 durch ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  ersetzen?

37.  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ . Beweisen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den Operationen

$$(a + b\sqrt{2}) \oplus (a' + b'\sqrt{2}) := (a + a') + (b + b')\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \otimes (a' + b'\sqrt{2}) := (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2}$$

ein Unterkörper von  $\mathbb{R}$  ist, indem Sie die Voraussetzungen der entsprechenden Proposition überprüfen. Versuchen Sie abzuschätzen, wieviel Arbeit es Ihnen bereiten würde, durch Nachprüfen der Körperaxiome zu beweisen, dass  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$  ein Körper ist. Vergleichen Sie diesen Aufwand mit dem, den Ihnen dieses Übungsbeispiel bereitet hat.

38. *Nullteilerfreiheit.* Sei  $K$  ein beliebiger Körper. Widerlegen Sie die Aussage: Es gibt  $a, b \in K$  mit  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  und  $ab = 0$ .

39.  $\mathbb{Z}_5$ . Stellen Sie die beiden Verknüpfungstabellen (bzgl.  $+$  und  $\cdot$ ) von  $\mathbb{Z}_5$  auf. Welche algebraische Struktur sehen Sie vor sich?
40.  $\mathbb{Z}_6$ . Stellen Sie die beiden Verknüpfungstabellen (bzgl.  $+$  und  $\cdot$ ) für  $\mathbb{Z}_6$  auf und vergleichen Sie diese mit derjenigen von  $\mathbb{Z}_5$ . Welche algebraische Struktur liegt vor? Sind  $\mathbb{Z}_5$  und  $\mathbb{Z}_6$  als Ringe isomorph?