Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

1	
2	
3	
4	
G	

- ☐ **R. Steinbauer**
- ☐ **H. Schichl**

Note:

Prüfung zu Einführung in das mathematische Arbeiten (1.10.2004)

(1) *(Kurvendiskussion)* Eine rationale Funktion r der Form

$$r(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$$

hat ihren einzigen Pol, der erster Ordnung ist, bei $x = 1$. Der Punkt $P = (4, 33)$ ist ein Extremwert von r, und die Steigung von r bei $x = 0$ beträgt -24.

(a) Bestimme die Funktionsgleichung von r. (4 Punkte)
(b) Ermittle alle Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von r. (2 Punkte)
(c) Bestimme die schräge Asymptote von r und fertige eine Skizze an. (2 Punkte)
(d) Ermittle den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von r und der $x - Achse$ eingeschlossen wird. (2 Punkte)

(2) (a) *(Algebra)* Überprüfe, ob die Menge mit der unten definierten Relation $(G = \times \setminus \{0\}, \oplus)$ eine Gruppe bildet:

$$(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) := (a_1 b_2 + b_1 a_2, a_2 b_2).$$

(5 Punkte)

(b) *(Gleichung)* Bestimme alle rellen Lösungen der Gleichung

$$3 \tan x - 2 \cos x = 0.$$

(3 Punkte)

(3) (a) *(Analytische Geometrie)* Gegeben sei die Kugel k mit Mittelpunkt $(1, 3, 5)$ und Radius 6. Ermittle die Gleichung der Kugel und bestimme die Lage der Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und der Ebene

$$\varepsilon_1 : -3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5$$

in Bezug auf k. (*Hinweis:* Berechne den Abstand der Ebene vom Kugelmittelpunkt.) (5 Punkte)

(b) *(Vollständige Induktion)* Beweise, dass für jede natürliche Zahl n die Beziehung

$$\sum_{i=0}^{n} (3i^2 + 2i) = \tfrac{1}{2} n(n+1)(2n+3)$$

gilt. (5 Punkte)

(4) (a) *(Funktionen)* Seien A, B, und C Mengen. Definiere den Begriff einer Funktion von A nach B und die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv. Erkläre, was man unter der Verknüpfung einer Funktion $f : A \to B$ mit einer Funktion $g : B \to C$ versteht.
(5 Punkte)

(b) Existieren Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ mit den Eigenschaften (begründe!):

(i) f nicht injektiv, g injektiv und $g \circ f$ injektiv,
(ii) f surjektiv, g nicht surjektiv und $g \circ f$ surjektiv,
(iii) f nicht surjektiv, g nicht injektiv und $g \circ f$ bijektiv,

(3 Punkte)

(c) *(Schranken)* Existieren Maximum, Minimum, Supremum und Infimum der folgenden Teilmengen von ? Wenn ja, gib sie an.

$$]-\pi, \pi], \quad \{1/n, n \in \quad \setminus \{0\}\}, \quad]-\infty, 5], \quad \bigcup_{n \in} [\tfrac{1}{n}, n]$$

(4 Punkte)