Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1
2
3
4
G

Note:

Einführung in das mathematische Arbeiten

Roland Steinbauer, Wintersemester 2003/04

5. Prüfungstermin (5.3.2004)

1. *(Analytische Geometrie)*

   (a) Untersuche (rechnerisch) die Lagebeziehung der drei angegebenen Ebenen. Berechne gegebenenfalls Schnittpunkt oder Schnittgeraden.

   $$\begin{array}{rrcl} \varepsilon_1: & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 11 \\ \varepsilon_2: & 2x_1 - 1x_2 - 3x_3 & = & -9 \\ \varepsilon_3: & -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 11. \end{array}$$

   (6 Punkte)

   (b) Eine Ellipse und eine Parabel in erster Hauptlage haben einen gemeinsamen Brennpunkt und schneiden einander im Punkt $P = (3, 2\sqrt{6})$. Fertige eine Skizze an und bestimme die Gleichung von Parabel und Ellipse. Gibt es weitere Schnittpunkte? Wenn ja gib ihre Koordinaten an. (6 Punkte)

2. *(Kurvendiskussion)* Der Graph der Funktion

   $$f(x) = \frac{x^3 + a}{bx}$$

   hat den Extrempunkt $E = (2, 2)$.

   (a) Ermittle die Funktionsgleichung von f und den maximal möglichen Definitionsbereich. (4 Punkte)

   (b) Bestimme alle Hoch- und Tiefpunkte von f. (2 Punkte)

   (c) Skizziere den Funktionsgraphen von f. (2 Punkte)

3. (a) *(Vollständige Induktion)* Beweise die folgende Aussage durch vollständige Induktion für alle natürlichen $n \geq 1$

   $$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1).$$

   (5 Punkte)

(b) *(Algebra)* Überprüfe, ob die folgenden beiden auf $\mathbb{R}$ definierten Verknüpungen $\otimes$ und $\odot$ assoziativ resp. kommutativ sind

$$a \otimes b := ab - 4$$

$$a \odot b := 6a + 6b + 3ab - 2 = 3(a+2)(b+2) - 2.$$

(6 Punkte)

4. (a) *(Ordnungsrelation)* Definiere den Begriff der Ordnungsrelation auf einer Menge M und gib ein Beispiel. (5 Punkte)

   (b) *(Schranken)* Sind die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ (mit der natürlichen Ordnung $\leq$) nach oben bzw. nach unten beschränkt? Wenn ja, gib Infimum bzw. Supremum an. Handelt es sich dabei jeweils um Minima resp. Maxima?

$$(-3, 12], \qquad (-5, -2) \cup (-1, \infty), \qquad (-7, 4] \cap (1, \infty), \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-n, n\}$$

(4 Punkte)