Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2024, 3. Termin, 18.12.2022, Roland Steinbauer
Prüfungsausarbeitung

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und fundamentale Ideen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Für eine relle Folge $(a_n)_n$ und ein $a \in \mathbb{R}$ gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Welche Aussagen sind dazu äquivalent?
   (a) [false] In jeder ε-Umgebung von a liegen unendlich viele Folgenglieder a_n.
   (b) [false] $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.
   (c) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$.
   (d) [false] Es gibt eine ε-Umgebung von a in der fast alle Folgenglieder a_n liegen.

2. (*Beschränkte Folgen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine reelle Folge (a_n) ist beschränkt, falls
   (a) [false] $\exists C > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq C \quad \forall n \geq N$.
   (b) [false] $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists C > 0: \quad |a_n| \leq C$.
   (c) [true] $\exists C > 0: \quad |a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   (d) [true] $\exists C > 0: \quad a_n \leq C$ und $a_n > -C \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3. (*Grenzwert vs. Häufungswerts.*) Welche Aussagen sind für reelle Folgen $(a_n)_n$ und $a \in \mathbb{R}$ korrekt?
   (a) [true] Falls außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen, dann ist a Häufungswert von (a_n).
   (b) [true] Falls außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen, dann ist a Grenzwert von (a_n).
   (c) [false] Falls a der einzige Häufungswert von (a_n) ist, dann ist a auch schon Grenzwert von (a_n).
   (d) [false] Ist a Grenzwert von (a_n), dann ist a auch ein Häufungswert von (a_n) aber es kann noch weitere Häufungswerte geben.

4. *(Zum Begriff der Reihe.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge und $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$.
   Mit dem Ausdruck $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet man
   (a) [true] die Reihe selbst, also die Folge $(s_k)_k$.
   (b) [true] den Reihenwert $\lim_{k\to\infty} s_k$, falls er endlich ist.
   (c) [false] den Reihenwert $\lim_{n\to\infty} a_n$, falls er endlich ist.
   (d) [false] den Reihenwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} s_k$, falls er endlich ist.

5. (*Stetigkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$, falls
   (a) [false] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ sodass für alle x mit $|x - a| < \delta$ schon $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ gilt.
   (b) [true] für jede reelle Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ auch $f(x_n) \to f(a)$ gilt.
   (c) [true] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D$ mit $|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
   (d) [true] es zu jedem (noch so kleinen) ε ein $U_\delta(a) \subseteq D$ gibt, sodass alle $x \in U_\delta(a)$ nach $U_\varepsilon(f(a))$ abgebildet werden (d.h. $f(x)$ in $U_\varepsilon(f(a))$ liegt).

6. (*Elementar transzendente Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) [false] Für die Exponentialfunktion gilt $\exp(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})$.

(b) [true] Die allgemeine Potenzfunktion ist definiert als $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$.

(c) [true] Die Logarithmusfunktion ist (auf ihrem gesamten Definitionsbereich $(0, \infty)$) differenzierbar.

(d) [true] Die Sinusfunktion ist (auf ihrem gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R}$) beschränkt.

7. (*Stetigkeit und Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) korrekt?

(a) [false] Hat (der Graph von) f einen Knick, so ist f nicht stetig.

(b) [true] Hat (der Graph von) f einen Sprung, so ist f nicht differenzierbar.

(c) [false] Wenn f stetig ist, so hat (der Graph von) f keinen Knick.

(d) [true] Hat (der Graph von) f einen Knick, so ist f nicht differenzierbar.

8. (*Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt?
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist im Punkt ξ im Intervall I differenzierbar, falls

(a) [false] die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{x \searrow \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ und $\lim\limits_{x \nearrow \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ existieren.

(b) [true] $\lim\limits_{0 \neq h \to 0} \dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ existiert und endlich ist.

(c) [false] f auf $I \setminus \{\xi\}$ differenzierbar ist und $\lim_{x \searrow \xi} f'(x) = \lim_{x \nearrow \xi} f'(x)$ gilt.

(d) [true] der Differenzenquotient von f bei ξ einen endlichen Limes für $x \to \xi$ besitzt.

2 Sätze & Resultate

1. *(Beschränktheit & Konvergenz von Folgen).* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

(a) [false] Es gibt konvergente Folgen die unbeschränkt sind.

(b) [false] Jede beschränkte Folge konvergiert.

(c) [true] Jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert.

(d) [false] Es gibt monotone und beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.

2. (*Folgen & Konvergenz.*) Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

(a) [true] Jede konvergente Folge ist auch eine Cauchy-Folge.

(b) [true] Jede streng monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist auch beschränkt.

(c) [true] Es gibt monotone Folgen, die nicht konvergieren.

(d) [false] Es gibt unbeschränkte, monotone Folgen, die konvergieren.

3. (*Zur Reihenkonvergenz.*) Welche der folgenden Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^\infty a_n$ sind korrekt?

(a) [false] $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert absolut, falls $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ gilt.

(b) [false] $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert absolut, falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ gilt.

(c) [true] $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert, falls alle $a_n \geq 0$ sind und die Folge der Partialsummen $s_m = \sum_{n=0}^m a_n$ beschränkt ist.

(d) [true] $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergiert absolut, falls es ein $C < 1$ gibt und $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq C$ gilt.

4. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

(a) [false] Jede stetige Funktionen auf $(0, 1)$ ist beschränkt.

(b) [false] Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat einen Fixpunkt.

(c) [true] Ist f stetig auf (a, b) und gilt $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$, dann gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0 auf der $f(x) > 0$ gilt.

(d) [true] Stetige Funktionen auf $[a, b]$ sind beschränkt.

5. (*Mittelwertsatz.*) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) [true] Es gibt eine Stelle $\xi \in (a, b)$ in der die Tangente parallel zur Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

(b) [false] Dann ist f auch auf $[a, b]$ differenzierbar, wobei in a und b nur die einseitigen Ableitungen existieren.

(c) [true] Gilt zusätzlich $f(a) = f(b)$, so gibt es einen Punkt in (a, b) mit waagrechter Tangente.

(d) [true] Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

6. (*Kurvendiskussion.*) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

   (a) [true] Falls f in ξ ein lokales Maximum hat, so gilt $f'(\xi) = 0$.

   (b) [true] Falls für ein $\xi \in (a, b)$ gilt, dass $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$, dann hat f in ξ ein Minimum.

   (c) [false] f kann in ξ ein globales Extremum haben, obwohl $f'(\xi) \neq 0$ gilt.

   (d) [false] Hat f ein lokales Minimum in ξ, dann ist f knapp links von ξ monoton steigend und knapp rechts von ξ monoton fallend.

7. (*Zur Integralrechnung.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Mit integrierbar ist immer Riemann-integrierbar gemeint.)

   (a) [true] Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch integrierbar auf $[a, b]$.

   (b) [false] Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch integrierbar auf $[a, b]$.

   (c) [true] Für stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

   $$\Big| \int_a^b f(t)dt \Big| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$

   (d) [true] Für jedes stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

   $$\int_a^b f(t)dt = f(\xi)(b - a).$$

8. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Welche Aussagen sind für eine auf einem Intervall I definierte stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und ein beliebiges $a \in I$ korrekt?

   (a) [true] f hat eine Stammfunktion.

   (b) [false] $\dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

   (c) [true] $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f und F ist stetig differenzierbar.

   (d) [false] $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_a^x f(x)dx = f(x)$.

3 Beispiele, Gegenbeispiele, Rechenaufgaben

1. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?

   (a) [false] $\dfrac{n^2}{7n} \to \dfrac{1}{7}$ $(n \to \infty)$.

   (b) [true] $\dfrac{2n^3 + 4n}{3 + n + 3n^3} \to \dfrac{2}{3}$ $(n \to \infty)$.

   (c) [true] $\dfrac{(-1)^n \, n}{n}$ hat zwei verschiedene Häufungswerte.

   (d) [true] Falls für eine reelle Folge $(a_n)_n$ für alle n gilt, dass $0 \leq a_n \leq 1/n$, dann ist (a_n) eine Nullfolge.

2. (*Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ konvergiert nach dem Wurzeltest.

(b) [true] $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} < \infty$ konvergiert nach dem Leibnitz-Kriterium.

(c) [false] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, weil $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist.

(d) [true] $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}$.

3. *(Winkelfunktionen).* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $\arctan$ ist beschränkt.

   (b) [false] $\tan$ ist beschränkt.

   (c) [true] $\arcsin(0) = 0$.

   (d) [true] $\arccos$ ist beschränkt.

4. (*Funktionsgrenzwerte 1*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = 0$.

   (b) [true] $\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^3} = 0$.

   (c) [true] $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$.

   (d) [false] $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

5. (*Stetigkeit & Differenzierbarkeit*). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ $(x \leq 0)$ und $f(x) = x^3$ $(x > 0)$ ist in $\xi = 0$ differenzierbar.

   (b) [true] $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist überall stetig und auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar.

   (c) [false] $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0, \infty))$ ist überall stetig und differenzierbar.

   (d) [true] Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ $(x \leq 0)$ und $f(x) = x$ $(x > 0)$ ist in $\xi = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.

6. (*Monotonie.*) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3\,x^3.$$

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] f ist auf ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend.

   (b) [true] f ist auf ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend.

   (c) [false] f ist auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ streng monoton steigend, nicht aber auf ganz $\mathbb{R}$.

   (d) [false] $f'(x)$ ist überall positiv.

7. (*Funktionen, vermischtes.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [true] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ hat in $\xi = 0$ ein Minumum obwohl $f''(0) = 0$

   (b) [true] $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ hat in $x = 1$ ein (lokales und globales) Maximum, obwohl die Funktion dort nicht $f'(1) = 0$ erfüllt.

   (c) [false] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ hat in $x = 0$ ein Minimum, weil $f'(0) = 0$ gilt.

   (d) [true] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ hat in $x = 0$ ein Minimum und daher gilt $f'(0) = 0$.

8. (*Integrierbare Funktionen und Integral.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) [false] $f(x) = \cos(x)$ ist auf $[-\pi, 0]$ streng monoton fallend, und daher dort auch Riemann integrierbar.

   (b) [true] $f(x) = |x|$ ist stetig und daher auf $[-1, 1]$ auch Riemann integrierbar.

   (c) [false] Sei f die charakteristische Funktion von $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ (d.h. $f(x) = 1$ für $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ und $f(x) = 0$ sonst), dann ist f Riemann integrierbar auf $[0, 1]$ und es gilt $\int_0^1 f(x)\;dx \;=\; 1$.

   (d) [true] $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2(x)}\;dx \;=\; \int_0^{2\pi} \cos(x)\;dx \;=\; 0$.

Offene Aufgaben:

[1] (a) Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit $a_n \le b_n$ $\forall n$ (oder $\forall n \ge n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$).
Dann gilt, falls beide Folgen konvergieren, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n .$$

(b) Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungspunkt (oder äquivalent eine konv. Teilfolge).

Beweisschritte: (1) Aus der (OV) wird ein Kandidat für den HW gewonnen:
Genauer wird (OV) auf die Menge $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a_n > x$ für höchstens endl. viele $n\}$ angewandt. (rechts von A-Pkten liegen höchstens endl. viele FG.)
Da (a_n) beschränkt ist $\Rightarrow A \neq \emptyset$ und n. u. b.

$\xrightarrow{(OV)} \exists \inf A =: a$ Def. v. A

(2) a ist tatsächlich HW; da a inf A

$\Rightarrow a+\varepsilon$ nicht U.S. $\Rightarrow \exists x \in A: x < a+\varepsilon \Rightarrow$ fast alle $a_n < x < a+\varepsilon$

$\Rightarrow a$ U.S. $\Rightarrow a-\varepsilon \notin A \Rightarrow a_n > a-\varepsilon$ für unendl. viele n

zusammen $\Rightarrow$ Es sind unendlich viele a_n in $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \Rightarrow a$ HP. ◻

(c) $(a_n)_n$ heißt CF, falls $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n,m \ge N: |a_n - a_m| < \varepsilon$
Alle konvergenten reellen Folgen sind CF, daher z.B. $a_n = \frac{1}{n}$ ist CF

[2] (a) Rationale Fkt sind überall stetig nach dem „Baukastensystem".
Sie bestehen nämlich aus stetigen Bausteinen (Summen v. Potenzfkt mit reellen Koeffizienten im Zähler & Nenner) und die Stetigkeit respektiert die Verknüpfungen $+, \cdot, :$.

(b) $f(x) = |x|$ ist in $\xi = 0$ nicht diff.bar, denn der Differenzenquotient hat keinen Limes; genauer

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} \quad \text{und} \quad \lim_{h \nearrow 0} \frac{|h|}{h} = -1 \quad \text{aber} \quad \lim_{h \searrow 0} \frac{|h|}{h} = 1 .$$

(c) f diffbar in $\xi \Rightarrow f$ stetig in ξ

Wir verwenden folgendes Kriterium für Stetigkeit: f stetig in $\xi \Leftrightarrow \lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$

Dazu schreiben wir

$$|f(x)-f(\xi)| = \underbrace{\frac{|f(x)-f(\xi)|}{(x-\xi)}}_{\to |f'(\xi)| \text{ weil } f \text{ diffbar in } \xi} (x-\xi) \xrightarrow{x\to\xi} |f'(\xi)|\cdot 0 = 0 .$$

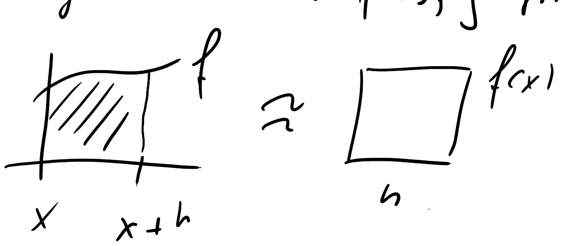
[3] (a) Quotientenfunktionen sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich (also außerhalb der Nullstellen der Fkt im Nenner) differenzierbar. Ihre Ableitung berechnet sich als Quotientenfunktion, wobei im Zähler eine Differenz von Produkten steht, wobei einmal die (alte) Zählerfkt abgeleitet mit der Nennerfkt multipliziert wird und davon das Produkt Zählerfkt mal Ableitung der Nennerfkt abgezogen wird. Im Nenner steht das Quadrat der (alten) Nennerfkt.

(b) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine stetige Fkt und a beliebig im Intervall I. Dann ist die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ stetig differenzierbar und es gilt auf ganz I: $F' = f$ (d.h. F ist Stammfkt von f).

Der Beweis besteht im wesentlichen daraus, den Differentialquotienten von F zu berechnen & zu sehen, dass er gleich f ist:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \approx \frac{f(x)\cdot h}{h} = f(x)$$

im entsprechenden Schritt wird das $\int_x^{x+h} f$ angenähert durch $h\cdot f(x)$; graphisch



dieses Argument kann mit dem MWS-$\int$ exakt gemacht werden:

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)\cdot h$$ für ein geeignetes ξ mit $x \le \xi \le x+h$ & daher $\xi \to x$ $(h \to 0)$.