NAME:		MAT.NR.	

Prüfung zu

Analysis in einer Variable für das Lehramt

Sommersemester 2024, 3. Termin, 18.12.2024

Roland Steinbauer

Erläuterungen zum Multiple Choice Teil: Für jede der 24 Fragen sind

4 Antwortmöglichkeiten angegeben, von denen 1, 2 oder 3 korrekt sind.

Die **„Bepunktung“** ist wie folgt: Für das Kreuzen einer korrekten Antwort erhalten Sie 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte (also z.B. bei 2 richtigen Antwortmöglichkeiten 1/2 Pkt pro gekreuzter richtiger Antwort, etc). Beim Ankreuzen einer falschen Antwort wird 1/(Anzahl der korrekten Antwortmöglichkeiten bei dieser Frage) Punkte abgezogen. Nichtankreuzen einer richtigen oder einer falschen Antwort ergibt keine Punkte. Pro Frage gibt es keine negativen Punkte, d.h. Sie können jeweils zwischen 0 und 1 Punkt pro Frage erreichen, insgesamt also höchstens 24 Punkte.

Die MC-Fragen müssen Sie auf dem gesonderten Antwortbogen ankreuzen. Dort müssen Sie Ihren Namen angeben und ihre Matrikelnummer eintragen **und vertikal als Ziffern ankreuzen**.

Beim **offenen Teil** der Prüfung können Sie ebenfalls maximal 24 Punkte erreichen. Die Punkte sind bei den jeweiligen Teilaufgaben angegeben.

Viel Erfolg!

Bitte nicht ausfüllen!

MC	1	2	3	OT	$\sum$	Note
(24)	(9)	(7)	(8)	(24)	(48)	

Teil 1: Multiple Choice Aufgaben

1 Zentrale Begriffe und fundamentale Ideen

1. (*Zur Grenzwertdefinition.*) Für eine relle Folge $(a_n)_n$ und ein $a \in \mathbb{R}$ gelte $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Welche Aussagen sind dazu äquivalent?

   (a) In jeder ε-Umgebung von a liegen unendlich viele Folgenglieder a_n.

   (b) $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$

   (c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$

   (d) Es gibt eine ε-Umgebung von a in der fast alle Folgenglieder a_n liegen.

2. (*Beschränkte Folgen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine reelle Folge (a_n) ist beschränkt, falls

   (a) $\exists C > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq C \quad \forall n \geq N.$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists C > 0: \quad |a_n| \leq C.$

   (c) $\exists C > 0: \quad |a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

   (d) $\exists C > 0: \quad a_n \leq C$ und $a_n > -C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

3. (*Grenzwert vs. Häufungswerts.*) Welche Aussagen sind für reelle Folgen $(a_n)_n$ und $a \in \mathbb{R}$ korrekt?

   (a) Falls außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen, dann ist a Häufungswert von (a_n).

   (b) Falls außerhalb jeder ε-Umgebung von a nur endlich viele a_n liegen, dann ist a Grenzwert von (a_n).

   (c) Falls a der einzige Häufungswert von (a_n) ist, dann ist a auch schon Grenzwert von (a_n).

   (d) Ist a Grenzwert von (a_n), dann ist a auch ein Häufungswert von (a_n) aber es kann noch weitere Häufungswerte geben.

4. *(Zum Begriff der Reihe.)* Welche Aussagen sind korrekt? Sei $(a_n)_n$ eine reelle Folge und $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$. Mit dem Ausdruck $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet man

   (a) die Reihe selbst, also die Folge $(s_k)_k$.

   (b) den Reihenwert $\lim\limits_{k\to\infty} s_k$, falls er endlich ist.

   (c) den Reihenwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, falls er endlich ist.

   (d) den Reihenwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} s_k$, falls er endlich ist.

5. (*Stetigkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D$, falls
   (a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ sodass für alle x mit $|x - a| < \delta$ schon $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ gilt.
   (b) für jede reelle Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ auch $f(x_n) \to f(a)$ gilt.
   (c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D$ mit $|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
   (d) es zu jedem (noch so kleinen) ε ein $U_\delta(a) \subseteq D$ gibt, sodass alle $x \in U_\delta(a)$ nach $U_\varepsilon(f(a))$ abgebildet werden (d.h. $f(x)$ in $U_\varepsilon(f(a))$ liegt).

6. (*Elementar transzendente Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   (a) Für die Exponentialfunktion gilt $\exp(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})$.
   (b) Die allgemeine Potenzfunktion ist definiert als $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$.
   (c) Die Logarithmusfunktion ist (auf ihrem gesamten Definitionsbereich $(0, \infty)$) differenzierbar.
   (d) Die Sinusfunktion ist (auf ihrem gesamten Definitionsbereich $\mathbb{R}$) beschränkt.

7. (*Stetigkeit und Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (I ein Intervall) korrekt?
   (a) Hat (der Graph von) f einen Knick, so ist f nicht stetig.
   (b) Hat (der Graph von) f einen Sprung, so ist f nicht differenzierbar.
   (c) Wenn f stetig ist, so hat (der Graph von) f keinen Knick.
   (d) Hat (der Graph von) f einen Knick, so ist f nicht differenzierbar.

8. (*Differenzierbarkeit.*) Welche Aussagen sind korrekt?
   Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist im Punkt ξ im Intervall I differenzierbar, falls
   (a) die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{x \searrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ und $\lim\limits_{x \nearrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ existieren.
   (b) $\lim\limits_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ existiert und endlich ist.
   (c) f auf $I \setminus \{\xi\}$ differenzierbar ist und $\lim_{x \searrow \xi} f'(x) = \lim_{x \nearrow \xi} f'(x)$ gilt.
   (d) der Differenzenquotient von f bei ξ einen endlichen Limes für $x \to \xi$ besitzt.

2 Sätze & Resultate

1. *(Beschränktheit & Konvergenz von Folgen).* Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) Es gibt konvergente Folgen die unbeschränkt sind.

   (b) Jede beschränkte Folge konvergiert.

   (c) Jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert.

   (d) Es gibt monotone und beschränkte Folgen, die nicht konvergieren.

2. (*Folgen & Konvergenz.*) Welche Aussagen über reelle Folgen sind korrekt?

   (a) Jede konvergente Folge ist auch eine Cauchy-Folge.

   (b) Jede streng monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge ist auch beschränkt.

   (c) Es gibt monotone Folgen, die nicht konvergieren.

   (d) Es gibt unbeschränkte, monotone Folgen, die konvergieren.

3. (*Zur Reihenkonvergenz.*) Welche der folgenden Aussagen über reelle Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sind korrekt?

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, falls $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ gilt.

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ gilt.

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls alle $a_n \geq 0$ sind und die Folge der Partialsummen $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ beschränkt ist.

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, falls es ein $C < 1$ gibt und $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq C$ gilt.

4. (*Eigenschaften stetiger Funktionen.*) Welche Aussagen sind korrekt?

   (a) Jede stetige Funktionen auf $(0, 1)$ ist beschränkt.

   (b) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat einen Fixpunkt.

   (c) Ist f stetig auf (a, b) und gilt $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$, dann gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0 auf der $f(x) > 0$ gilt.

   (d) Stetige Funktionen auf $[a, b]$ sind beschränkt.

5. (*Mittelwertsatz.*) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Es gibt eine Stelle $\xi \in (a, b)$ in der die Tangente parallel zur Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

   (b) Dann ist f auch auf $[a, b]$ differenzierbar, wobei in a und b nur die einseitigen Ableitungen existieren.

(c) Gilt zusätzlich $f(a) = f(b)$, so gibt es einen Punkt in (a, b) mit waagrechter Tangente.

(d) Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

6. (*Kurvendiskussion.*) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

   (a) Falls f in ξ ein lokales Maximum hat, so gilt $f'(\xi) = 0$.

   (b) Falls für ein $\xi \in (a, b)$ gilt, dass $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$, dann hat f in ξ ein Minimum.

   (c) f kann in ξ ein globales Extremum haben, obwohl $f'(\xi) \neq 0$ gilt.

   (d) Hat f ein lokales Minimum in ξ, dann ist f knapp links von ξ monoton steigend und knapp rechts von ξ monoton fallend.

7. (*Zur Integralrechnung.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? (Mit integrierbar ist immer Riemann-integrierbar gemeint.)

   (a) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch integrierbar auf $[a, b]$.

   (b) Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auch integrierbar auf $[a, b]$.

   (c) Für stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$

   (d) Für jedes stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(t)dt = f(\xi)(b - a).$$

8. (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*) Welche Aussagen sind für eine auf einem Intervall I definierte stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und ein beliebiges $a \in I$ korrekt?

   (a) f hat eine Stammfunktion.

   (b) $\dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$.

   (c) $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ ist eine Stammfunktion von f und F ist stetig differenzierbar.

   (d) $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_a^x f(x)dx = f(x)$.

3 Beispiele, Gegenbeispiele, Rechenaufgaben

1. (*Konvergenz von Folgen.*) Welche der folgenden Aussagen über Folgen sind korrekt?

   (a) $\dfrac{n^2}{7n} \to \dfrac{1}{7}$ $(n \to \infty)$.

   (b) $\dfrac{2n^3 + 4n}{3 + n + 3n^3} \to \dfrac{2}{3}$ $(n \to \infty)$.

   (c) $\dfrac{(-1)^n\, n}{n}$ hat zwei verschiedene Häufungswerte.

   (d) Falls für eine reelle Folge $(a_n)_n$ für alle n gilt, dass $0 \leq a_n \leq 1/n$, dann ist (a_n) eine Nullfolge.

2. (*Konvergenz von Reihen.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ konvergiert nach dem Wurzeltest.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} < \infty$ konvergiert nach dem Leibnitz-Kriterium.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, weil $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge ist.

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}$.

3. *(Winkelfunktionen).* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) arctan ist beschränkt.

   (b) tan ist beschränkt.

   (c) $\arcsin(0) = 0$.

   (d) arccos ist beschränkt.

4. (*Funktionsgrenzwerte 1*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = 0$.

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^3} = 0$.

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \sin(1/x) = 0$.

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

5. (*Stetigkeit & Differenzierbarkeit*). Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

   (a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ $(x \leq 0)$ und $f(x) = x^3$ $(x > 0)$ ist in $\xi = 0$ differenzierbar.

   (b) $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ ist überall stetig und auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar.

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in [0, \infty))$ ist überall stetig und differenzierbar.

(d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ $(x \leq 0)$ und $f(x) = x$ $(x > 0)$ ist in $\xi = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.

6. (*Monotonie.*) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3\,x^3.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ monoton steigend.

(b) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend.

(c) f ist auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ streng monoton steigend, nicht aber auf ganz $\mathbb{R}$.

(d) $f'(x)$ ist überall positiv.

7. (*Funktionen, vermischtes.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ hat in $\xi = 0$ ein Minumum obwohl $f''(0) = 0$

(b) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ hat in $x = 1$ ein (lokales und globales) Maximum, obwohl die Funktion dort nicht $f'(1) = 0$ erfüllt.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ hat in $x = 0$ ein Minimum, weil $f'(0) = 0$ gilt.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ hat in $x = 0$ ein Minimum und daher gilt $f'(0) = 0$.

8. (*Integrierbare Funktionen und Integral.*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $f(x) = \cos(x)$ ist auf $[-\pi, 0]$ streng monoton fallend, und daher dort auch Riemann integrierbar.

(b) $f(x) = |x|$ ist stetig und daher auf $[-1, 1]$ auch Riemann integrierbar.

(c) Sei f die charakteristische Funktion von $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ (d.h. $f(x) = 1$ für $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ und $f(x) = 0$ sonst), dann ist f Riemann integrierbar auf $[0, 1]$ und es gilt $\int\limits_0^1 f(x)\;dx \;=\; 1.$

(d) $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2(x)}\;dx \;=\; \int\limits_0^{2\pi} \cos(x)\;dx \;=\; 0.$

Teil 2: Offene Aufgaben

1. *Folgen, Reihen & Konvergenz*

   (a) (*Grenzwertsätze.*) Bekanntlich respektiert die Konvergenz reeller Folgen die $\leq$-Relation. Formulieren Sie das besagte Resultat exakt. (2 Pkte)

   (b) (*Bolzano-Weierstraß.*) Formulieren Sie mathematisch exakt den Satz von Bolzano-Weiierstraß und erläutern Sie, aus welchen wesentlichen Schritten der Beweis besteht. (5 Pkte)

   (c) (*Cauchyfolgen.*) Definieren Sie (exakt) den Begriff einer reellen *Cauchyfolge* und geben Sie ein Beispiel einer Cauchyfolge an. (2 Pkte)

2. *Funktionen, Stetigkeit & Differenzierbarkeit*

   (a) (*Rationale Funktionen sind stetig.*) Erklären Sie kurz und in Worten, warum rationale Funktionen (auf ihrem gesamten Definitionsbereich) stetige sind. (2 Pkte)

   (b) (*Knicke zerstören die Differenzierbarkeit.*) Zeigen Sie explizit, dass die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ im Punkt $\xi = 0$ nicht differenzierbar ist. (2 Pkte)

   (c) (*Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit.*) Beweisen Sie, dass wenn eine Funktion in einem Punkt differenzierbar ist, sie dort auch schon stetig ist. Erläutern/begründen Sie alle Beweisschritte genau! (3 Pkte)

3. *Differenzieren & Integrieren*

   (a) (*Quotientenregel.*) Formulieren Sie die Quotientenregel der Differentialrechnung, *ohne* Verwendung mathematischer Symbole.[1] (3 Pkte)

   (b) (*Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnunng.*) Der erste Teil des Hauptsatzes besagt, dass durch Integration eine Stammfunktion gewonnen werden kann. Formulieren Sie diese Aussage exakt und geben Sie eine Beweisskizze. Illustrieren Sie dabei den entscheidenden Schritt graphisch. (5 Pkt)

[1] Also insbesondere *ohne* für die beteiligten Funktionen eine Bezeichnung, wie etwa f und g zu verwenden.