

2 Normierte Vektorräume und stetige lineare Operatoren

2.1 Eigenschaften Normierter Vektorräume

22. *Äquivalente Normen im \mathbb{R}^n .*

Beweise die Behauptung aus Beispiel 2.5(i), nämlich, dass für alle x in \mathbb{R}^n

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \quad \text{und} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

gilt. Zeige, dass die Konstanten optimal gewählt sind. *Tipp:* Mit Hilfe der graphischen Darstellung im \mathbb{R}^2 lassen sich leicht Vektoren finden, für die die jeweiligen Ungleichungen scharf sind.

23. *Äquivalente Normen auf $\mathcal{C}[0, 1]$?*

Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathcal{C}[0, 1]$ äquivalent? Gib einen Beweis oder ein explizites Gegenbeispiel an.

24. *Zur Charakterisierung endlichdimensionaler normierter Vektorräume.*

Zeige *direkt*—insbesondere ohne Verwendung von Satz 2.11:

- (i) Ist in einem normierten Vektorraum die Einheitskugel kompakt, so gilt die Heine-Borel Eigenschaft, d.h. alle abgeschlossenen und beschränkten Mengen sind kompakt.
- (ii) Ist in einem normierten Vektorraum die Einheitskugel kompakt, so ist der Raum endlichdimensional. *Hinweis:* Verwende die Überdeckungseigenschaft, um eine endliche Menge zu finden, die schon den ganzen Raum aufspannt; wäre dem nämlich nicht so, führte das Lemma von Riesz zu einem Widerspruch.

25. *Grenzfall des Lemmas von Riesz.*

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass das Rieszsche Lemma 2.10 für $\delta = 1$ nicht gilt.

Anleitung: Sei $V = \{x \in \mathcal{C}^0[0, 1] : x(1) = 0\}$ mit $\|\cdot\|_\infty$ und betrachte den (abgeschlossenen, echten!) Teilraum $U = \{x \in V : \int_0^1 x(t) dt = 0\}$. Gehe indirekt vor und betrachte die Folge $x_n(t) = 1 - t^n \in V$ mit $\|x_n\|_\infty = 1$ sowie die Folge $u_n = x - \lambda_n x_n$, wobei x das aufgrund der indirekten Annahme existierende Element in V mit $\|x - u\|_\infty \geq 1$ für alle $u \in U$ ist und

$$\lambda_n := \frac{\int_0^1 x(t) dt}{1 - \frac{1}{n+1}}.$$

Wegen der Wahl von λ_n ist u_n in U und daher muss $|\lambda_n| \geq 1$ gelten, was zu einem Widerspruch führt, da $|\int x| < 1$ gilt!

26. *Vererbungseigenschaften von Dichtheit und Separabilität.*

- (i) Sei (X, d) metrischer Raum und A, B Teilmengen von X . Zeige, dass falls A dicht in B liegt und B dicht in X liegt, dann auch A dicht in X liegt. *Hinweis:* Entscheidend ist hier natürlich, dass B als metrischer Raum mit der von X ererbten Metrik aufzufassen ist!
- (ii) Zeige, dass Teilmengen separabler metrischer Räume wieder separabel sind. *Warnung:* Lass dich nicht durch die Einfachheit von (i) dazu verleiten, die (wahre) Schwierigkeit zu übersehen!

27. *Separabilität des Raums der konvergenten und Nullfolgen.*

- (i) Zeige, dass der Raum c der konvergenten Folgen separabel ist. *Tipp:* $x = (x_n)_n \in c$ mit $\lim x_n = \xi$ kann mit $e_0 := (1, 1, \dots)$ und den Standardeinheitsvektoren e_k ($k \geq 1$) in der Form $x = \xi e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \xi) e_k$ geschrieben werden.

- (ii) Beweise 2.14(iv), i.e., dass der Raum c_0 der Nullfolgen separabel ist. *Hinweis:* Falls dir (zurecht!) eine abgespeckte Version des Beweises von (i) zu langweilig scheint, bemerke, dass unter Verwendung von Aufgabe 26(ii) (fast) nichts mehr zu tun ist!

2.2 Stetige lineare Operatoren

28. Operatornorm im Endlichdimensionalen.

Im folgenden ist von Normen von Matrizen die Rede. Damit ist natürlich immer die Norm der entsprechenden Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m gemeint, jeweils mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ ausgestattet.

- (i) Berechne die Norm der Matrix $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
- (ii) Bestimme die Norm der Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ($a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Tipp: Welche Abbildung bewirkt die Matrix geometrisch auf dem \mathbb{R}^2 ? lässt sich daraus schon die Norm ablesen?

- (iii) Zeige, dass die Norm einer Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ gleich der Wurzel aus dem größten Eigenwert von $A^t A$ ist. *Anleitung:* Maximiere $\langle Ax | Ax \rangle$ unter der Nebenbedingung $\langle x | x \rangle = 1$ mittels der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

29. Abhängigkeit der Operatornorm.

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix. Zeige dass die Norm von A bezüglich $\|\cdot\|_1$ (auf \mathbb{K}^n bzw \mathbb{K}^m) das Maximum der Spaltensummen der Absolutbeträge der a_{ij} ist, und $\|A\|$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ das Maximum der Zeilensummen der Absolutbeträge der a_{ij} . Genauer zeige, dass

- (i) bezüglich $\|\cdot\|_1$ gilt: $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$.
- (ii) bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gilt: $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

30. Multiplikationsoperatoren auf l^p und $L^2[a, b]$

- (i) Beantworte die Frage, welche Operatoren $T : l^p \rightarrow l^p$ der Form

$$l^p \ni x = (x_n)_n \mapsto Tx = (\lambda_n x_n)_n,$$

wobei $(\lambda_n)_n$ eine Folge in \mathbb{K} ist, stetig sind (vgl. Beispiel 2.28(iii)). *Anleitung:* Notwendig und hinreichend für die Beschränktheit von T ist die Beschränktheit von $(\lambda_n)_n$.

- (ii) Als kontinuierliches Analogon zu (i) betrachte den Operator $T_g : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$

$$L^2[a, b] \ni f \mapsto T_g f := g f,$$

wobei $g \in C[a, b]$ fix vorgegeben ist. Zeige, dass T_g stetig ist mit $\|T_g\| = \|g\|_\infty$. Was ändert sich, falls L^2 durch L^1 ersetzt wird?

31. Ein Funktional auf $C[0, 1]$.

Für $g \in C[0, 1]$ definiere das Funktional T_g auf $C[0, 1]$ durch

$$T_g : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad T_g f := \int_0^1 g(t) f(t) dt.$$

Zeige, dass (vgl. 2.28(vi)) $\|T_g\| = \|g\|_1$ gilt. *Hinweis:* Für den (schwierigeren) Beweis, dass $\|T_g\| \geq \|g\|_1$ gilt, verwende für $\varepsilon > 0$ die Funktion $f_\varepsilon(t) := \overline{g(t)} / (|g(t)| + \varepsilon)$.

32. *Integraloperatoren auf L^2 .*

Sei $k \in L^2([0, 1]^2)$ und $f \in L^2[0, 1]$. Aus dem Satz von Fubini folgt, dass $k(s, \cdot) \in L^2[0, 1]$ für fast alle s gilt. Weiters folgt aus der Hölder-Ungleichung, dass die Integrale $\int k(s, t)f(t)dt$ für fast alle s existieren. Wir erhalten also die messbare Funktion

$$T_k f(s) := \int_0^1 k(s, t) f(t) dt$$

(stillschweigend außerhalb der oben angesprochenen Nullmenge mit 0 fortgesetzt). Zeige, dass T_k ein stetiger Operator auf $L^2[0, 1]$ mit $\|T_k\| \leq \|k\|_{L^2([0, 1]^2)}$ ist.

Hinweis: Wenn du mit den maßtheoretischen Aspekten noch ein bißchen auf Kriegsfuß stehst, dann ziehe die Literatur zu Rate. Die Operatoren T_k heißen Hilbert-Schmidt Operatoren und wegen ihrer großen Wichtigkeit wirst du keine Schwierigkeiten haben aus der Fülle der Darstellungen eine zu finden, die dir zusagt! Um die geforderte Abschätzung zu beweisen, benötigst du aber nicht mehr als den Satz von Fubini und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

2.3 Dualräume normierter Vektorräume

33. *Ein unstetiges lineares Funktional.*

Wandle Bsp. 2.28(iv) geeignet ab, um ein unstetiges lineares Funktional auf dem Raum c_{00} der abbrechenden Folgen zu konstruieren. *Tipp:* Mit der Bezeichnung aus 2.28(iv) versuche $\sum_n (Tx)_n$.

34. *Der Dualraum von c_0 .*

Beweise Satz 2.42(ii), d.h. dass $c'_0 \cong l^1$ gilt. *Hinweis:* Gehe analog zum Beweis von 2.42(i) vor.

35. *Lineare Funktionale auf l^1 und l^∞ .*

- (i) Für $y \in l^\infty$ berechne die Norm des linearen Funktionals f_y auf l^1 , das durch

$$l^1 \ni x \mapsto f_y(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

gegeben ist.

- (ii) Vertausche in (i) die Rollen von l^∞ und l^1 und löse die dadurch entstehende analoge Aufgabe.

Warnung (vgl. 2.43): Obwohl die beiden Aufgaben so nett symmetrisch in bezug auf l^1 und l^∞ aussehen, sind sie es in einem fundamentalen Sinn **nicht!** Während in (i) die f_y bereits *alle* stetigen linearen Funktionale auf l^1 darstellen (Satz 2.42(i)), gibt es im Fall (ii) eine „Vielzahl“ weiterer stetiger linearer Funktionale auf l^∞ ; kurz gesagt $(l^1)' \cong l^\infty$ aber $(l^\infty)' \supsetneq l^1$.

36. *Der Dualraum von $l^\infty(n)$.*

Führe Bemerkung 2.44 genauer aus, d.h. zeige, für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $(l^\infty(n))' \cong l^1(n)$. Beantworte insbesondere folgende Frage: Welcher Beweisteil funktioniert hier, geht aber im unendlichdimensionalen Fall schief. Überrascht dich das?