

# Proseminar zu „Analysis auf Mannigfaltigkeiten“

Roland Steinbauer

SS 2016

- (a) Seien  $E, F$  endlichdimensionale Vektorräume und  $f : E \rightarrow F$  eine Abbildung. Wann heißt  $f$  differenzierbar in einem Punkt  $x \in E$ ? Was versteht man unter der Ableitung  $Df(x)$  von  $f$  in  $x$ ?  
(b) Wie lautet die Kettenregel für differenzierbare Abbildungen?  
(c) Sei  $f : E \rightarrow F$  linear. Zeige, dass  $Df(x) = f$  für alle  $x \in E$ .  
(d) Sei  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$  bilinear. Zeige, dass für  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$  und  $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$  gilt:

$$Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = f(x_1, v_2) + f(v_1, x_2).$$

$$(\text{Hinweis: } Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f((x_1, x_2) + t(v_1, v_2))).$$

- Zeige, dass

$$c : (-2\pi, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(t/2))$$

eine reguläre Kurve ist, die auf dem Schnitt der Kugel um 0 mit Radius 2 mit dem Zylinder  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  liegt.

- Eine Kurve  $c$  ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung  $r = 2 \cos \theta - 1$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ). Bestimme die Gleichung von  $c$  in kartesischen Koordinaten und zeige, dass  $c$  eine reguläre Kurve ist. Zeige, dass  $c$  einen Doppelpunkt besitzt (Skizze!). Ist das ein Widerspruch zur Regularität von  $c$ ?  
4. Bestimme eine Parametrisierung nach der Bogenlänge für die Kurve

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

5. Bestimme für die Kettenlinie

$$c(t) = (t, \cosh(t))$$

die Bogenlängenfunktion  $s(t)$ , eine Parametrisierung nach der Bogenlänge und das Frenetsche Begleitbein. Berechne die Krümmung  $\kappa$  und gib eine Parametrisierung für die Evolute von  $c$  an.

6. (Hauptsatz der ebenen Kurventheorie) Beweise Bem 1.2.3 aus der Vorlesung, d.h. zeige die folgenden Aussage: Sei  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion auf dem Intervall  $I$ . Dann existiert eine Frenet-Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Krümmung  $\kappa$ . Die Kurve  $c$  ist eindeutig bis auf Euklidische Bewegungen.

Tipp: Verwende den Ansatz  $e_1(s) = (\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)))$  und die Frenet-Gleichungen.

7. Sei  $r = r(\varphi)$  die Darstellung einer Kurve  $c$  in Polarkoordinaten und sei  $r' = \frac{dr}{d\varphi}$ . Zeige, dass für die Bogenlänge von  $c$  gilt:

$$L_{\varphi_0}^{\varphi_1}(c) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

8. Bestimme für die Schraubenlinie

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

das Frenetsche Begleitbein sowie Krümmung und Torsion.

9. (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie) Studiere den Beweis von Theorem 1.3.3 im Skriptum zur Vorlesung.

10. (a) Zeige, dass man nahe  $(x_0, y_0) = (\pi, \pi/2)$  im Gleichungssystem

$$\frac{x^4 + y^4}{x} = u, \quad \sin x + \cos y = v$$

$x$  und  $y$  als glatte Funktionen von  $(u, v)$  schreiben kann. (Präzisiere zunächst diese Aufgabenstellung!)

- (b) Zeige, dass nahe dem Punkt  $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$  durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

$u$  und  $v$  eindeutig als glatte Funktionen von  $x$  und  $y$  festgelegt sind. Berechne  $\frac{\partial u}{\partial x}$  an der Stelle  $(1, 1)$ .

11. (a) Zeige, dass die Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Phi(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$  ein lokaler, aber kein globaler Diffeomorphismus ist.

- (b) Gib ein Beispiel für zwei Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an, sodass  $f \circ g$   $C^\infty$  ist, aber  $g$  nicht  $C^\infty$  ist.

12. Zeige, dass der Zylinder  $M$  im  $\mathbb{R}^3$ , der die Gleichung  $x^2 + y^2 = R^2$  hat, eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension 2 im  $\mathbb{R}^3$  ist. Gib außerdem eine lokale Parametrisierung, eine Darstellung als lokaler Graph und eine lokale Trivialisierung von  $M$  an.

13. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := y^4 - y^2 + \frac{1}{4}x^2$ . Bestimme die Nullstellenmenge  $M := f^{-1}(0)$  von  $f$  (Verwende z.B. *Mathematica*). Definiert  $f$  die Struktur einer Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$  auf  $M$ ? Wie hängt dies mit Beispiel 2.1.7 (iii) aus der Vorlesung zusammen?

14. Zeige, dass durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + xy - y - z &= 0 \\ 2x^2 + 3xy - 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

eine Teilmannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^3$  festgelegt wird. Bestimme die Dimension von  $M$ .

15. Seien  $M, N$  Teilmannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^m$  bzw.  $\mathbb{R}^n$ .

- (a) Sei  $(\psi, V)$  eine Karte von  $M$  und  $W$  offen in  $M$ . Dann ist auch  $(\psi|_{V \cap W}, V \cap W)$  eine Karte von  $M$ .

- (b) Sei  $f : M \rightarrow N$   $C^\infty$  und  $U$  offen in  $M$ . Dann ist  $f|_U : U \rightarrow N$   $C^\infty$ .

- (c) Sei  $f : M \rightarrow N$  stetig. Zeige:  $f$  ist genau dann  $C^\infty$ , wenn für jede glatte Abbildung  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $V$  offen in  $N$  gilt:  $g \circ f$  ist glatt.

16. (a) Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ein homogenes Polynom vom Grad  $\geq 1$ , das an mindestens einer Stelle einen positiven Wert annimmt. Zeige: dann ist die Menge  $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 1\}$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .
- (b) Zeige, dass das ein- bzw. zweischalige Hyperboloid  $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$  bzw.  $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}$  eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist.
17. (a) Show that the chart  $(\psi, \mathbb{R})$ ,  $\psi : x \mapsto x^3$  defines a  $\mathcal{C}^\infty$ -structure on  $\mathbb{R}$  which is different from the standard  $\mathcal{C}^\infty$ -structure on  $\mathbb{R}$ .
- (b) Find a diffeomorphism between the manifolds considered in (a).
18. For any real number  $r > 0$ , consider the map  $\varphi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  given by

$$\varphi_r(x) := \begin{cases} x & x \leq 0 \\ rx & x > 0 \end{cases}$$

Show that for each  $r$ , the atlas  $\{(\varphi_r, \mathbb{R})\}$  defines a differentiable structure on  $\mathbb{R}$ . Show that these structures are all different. Are the corresponding (uncountably many) manifolds pairwise diffeomorphic?

19. Let  $M := U \cup V$ , where  $U, V$  are given by

$$\begin{aligned} U &:= \{(s, 0) \mid s \in \mathbb{R}\} \quad \text{and} \\ V &:= \{(s, 0) \mid s < 0\} \cup \{(s, 1) \mid s > 0\}. \end{aligned}$$

Let  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(s, 0) := s$ ,  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi(s, 0) := s$ ,  $\psi(s, 1) := s$ , and  $\gamma : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\gamma(s, 0) := s^3$ ,  $\gamma(s, 1) := s^3$ .

- (i) Show that  $\{(\varphi, U), (\psi, V)\}$  defines a  $\mathcal{C}^\infty$ -structure on  $M$ .
- (ii) Is  $(\gamma, V)$  a chart in this differentiable structure?
20. (a) Let  $f : M_1 \rightarrow M_2$  and  $g : M_2 \rightarrow M_3$  be smooth maps between differentiable manifolds. Show that  $g \circ f : M_1 \rightarrow M_3$  is smooth as well.
- (b) Show that the dimension of a connected manifold  $M$  is a well-defined number  $n$ . *Hint:* if  $\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$  and  $\psi : W \rightarrow \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^m$  are compatible charts around  $p \in V \cap W$ , then  $m = n$ . Let  $\dim_p M := n$ . Then  $p \mapsto \dim_p M$  is locally constant, hence constant on  $M$ .

21. Let  $(A_i)_{i \in I}$  be a locally finite family of subsets of a topological space  $X$ . Show that  $(\overline{A_i})_{i \in I}$  is locally finite as well and that

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

22. Let  $M$  be a  $C^\infty$ -manifold (Hausdorff and second countable). Let  $U$  be open in  $M$  and let a  $A \subseteq U$  be closed. Then there exists a smooth function  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  with  $f|_A = 1$  and  $f|_{M \setminus U} = 0$ .
23. Let  $M$  be a  $C^\infty$ -manifold (Hausdorff and second countable). Let  $p \in U$ ,  $U$  open in  $M$  and  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  smooth. Show that there exists a smooth function  $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$  that coincides with  $f$  in a neighborhood of  $p$ .
24. (a) Let  $(\psi, V)$  denote the following chart of  $S^1$ :  $V = \{(\cos \theta, \sin \theta) \mid 0 < \theta < 2\pi\}$ ,  $\psi(\cos \theta, \sin \theta) = \theta$ . Let  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  be such that  $f(\cos \theta, \sin \theta) = e^{2\theta}$  on  $V$ . Calculate  $\frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{p_0} f$ , where  $p_0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ .
- (b) Let  $M$  be a manifold,  $(\psi, V)$  a chart and  $\psi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ . Let  $f : p \mapsto g(x^1(p), \dots, x^n(p))$ . Express  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f$  by  $g$ .
25. Let  $(\psi, V)$  be as in the previous problem and let  $(, U)$  be the following chart of  $S^1$ :  $U = \{(x, -\sqrt{1-x^2}) \mid x \in (-1, 1)\}$ ,  $(x, -\sqrt{1-x^2}) \mapsto x$ . Express  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  by  $\frac{\partial}{\partial x}$ , and conversely.
26. (a) Find a basis of the tangent space of  $S^2$  in a general point (use spherical coordinates).
- (b) Let  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  be the restriction of  $(x^1, x^2, x^3) \mapsto x^2$  to  $S^2$ . Find the matrix of the tangent map of  $f$  in  $p \in S^2$  with respect to the basis given in (a) and the natural basis of  $T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ .
27. Let  $M$  be a manifold and let  $p \in M$ . Denote by  $\mathcal{F}_p(M)$  the space of smooth functions defined locally around  $p$  which are of the form

$$f = c + \sum_{i \in I} f_i g_i$$

where  $c$  is constant and  $I$  is a finite set ( $c$  and  $I$  depend on  $f$ ), and  $f_i(p) = g_i(p) = 0$  for all  $i \in I$ . Prove: A linear map  $\partial$  defined on the set of smooth functions locally defined around  $p$  is a derivation if and only if it vanishes on  $\mathcal{F}_p(M)$ . (This provides an alternative but equivalent way of defining the tangent space of a manifold).