

# Proseminar zu „Analysis auf Mannigfaltigkeiten“

Roland Steinbauer

SS 2016

- (a) Seien  $E, F$  endlichdimensionale Vektorräume und  $f : E \rightarrow F$  eine Abbildung. Wann heißt  $f$  differenzierbar in einem Punkt  $x \in E$ ? Was versteht man unter der Ableitung  $Df(x)$  von  $f$  in  $x$ ?
- (b) Wie lautet die Kettenregel für differenzierbare Abbildungen?
- (c) Sei  $f : E \rightarrow F$  linear. Zeige, dass  $Df(x) = f$  für alle  $x \in E$ .
- (d) Sei  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$  bilinear. Zeige, dass für  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$  und  $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$  gilt:

$$Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = f(x_1, v_2) + f(v_1, x_2).$$

$$(\text{Hinweis: } Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f((x_1, x_2) + t(v_1, v_2))).$$

2. Zeige, dass

$$c : (-2\pi, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(t/2))$$

eine reguläre Kurve ist, die auf dem Schnitt der Kugel um 0 mit Radius 2 mit dem Zylinder  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  liegt.

3. Eine Kurve  $c$  ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung  $r = 2 \cos \theta - 1$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ). Bestimme die Gleichung von  $c$  in kartesischen Koordinaten und zeige, dass  $c$  eine reguläre Kurve ist. Zeige, dass  $c$  einen Doppelpunkt besitzt (Skizze!). Ist das ein Widerspruch zur Regularität von  $c$ ?
4. Bestimme eine Parametrisierung nach der Bogenlänge für die Kurve

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

5. Bestimme für die Kettenlinie

$$c(t) = (t, \cosh(t))$$

die Bogenlängenfunktion  $s(t)$ , eine Parametrisierung nach der Bogenlänge und das Frenetsche Begleitbein. Berechne die Krümmung  $\kappa$  und gib eine Parametrisierung für die Evolute von  $c$  an.

6. (Hauptsatz der ebenen Kurventheorie) Beweise Bem 1.2.3 aus der Vorlesung, d.h. zeige die folgenden Aussage: Sei  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion auf dem Intervall  $I$ . Dann existiert eine Frenet-Kurve  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit Krümmung  $\kappa$ . Die Kurve  $c$  ist eindeutig bis auf Euklidische Bewegungen.

Tipp: Verwende den Ansatz  $e_1(s) = (\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)))$  und die Frenet-Gleichungen.

7. Sei  $r = r(\varphi)$  die Darstellung einer Kurve  $c$  in Polarkoordinaten und sei  $r' = \frac{dr}{d\varphi}$ . Zeige, dass für die Bogenlänge von  $c$  gilt:

$$L_{\varphi_0}^{\varphi_1}(c) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

8. Bestimme für die Schraubenlinie

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

das Frenetsche Begleitbein sowie Krümmung und Torsion.

9. (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie) Studiere den Beweis von Theorem 1.3.3 im Skriptum zur Vorlesung.

10. (a) Zeige, dass man nahe  $(x_0, y_0) = (\pi, \pi/2)$  im Gleichungssystem

$$\frac{x^4 + y^4}{x} = u, \quad \sin x + \cos y = v$$

$x$  und  $y$  als glatte Funktionen von  $(u, v)$  schreiben kann. (Präzisiere zunächst diese Aufgabenstellung!)

- (b) Zeige, dass nahe dem Punkt  $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$  durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

$u$  und  $v$  eindeutig als glatte Funktionen von  $x$  und  $y$  festgelegt sind. Berechne  $\frac{\partial u}{\partial x}$  an der Stelle  $(1, 1)$ .

11. (a) Zeige, dass die Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Phi(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$  ein lokaler, aber kein globaler Diffeomorphismus ist.

- (b) Gib ein Beispiel für zwei Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an, sodass  $f \circ g$   $C^\infty$  ist, aber  $g$  nicht  $C^\infty$  ist.

12. Zeige, dass der Zylinder  $M$  im  $\mathbb{R}^3$ , der die Gleichung  $x^2 + y^2 = R^2$  hat, eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension 2 im  $\mathbb{R}^3$  ist. Gib außerdem eine lokale Parametrisierung, eine Darstellung als lokaler Graph und eine lokale Trivialisierung von  $M$  an.

13. Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := y^4 - y^2 + \frac{1}{4}x^2$ . Bestimme die Nullstellenmenge  $M := f^{-1}(0)$  von  $f$  (Verwende z.B. *Mathematica*). Definiert  $f$  die Struktur einer Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$  auf  $M$ ? Wie hängt dies mit Beispiel 2.1.7 (iii) aus der Vorlesung zusammen?

14. Zeige, dass durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + xy - y - z &= 0 \\ 2x^2 + 3xy - 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

eine Teilmannigfaltigkeit  $M$  des  $\mathbb{R}^3$  festgelegt wird. Bestimme die Dimension von  $M$ .

15. Seien  $M, N$  Teilmannigfaltigkeiten von  $\mathbb{R}^m$  bzw.  $\mathbb{R}^n$ .

- (a) Sei  $(\psi, V)$  eine Karte von  $M$  und  $W$  offen in  $M$ . Dann ist auch  $(\psi|_{V \cap W}, V \cap W)$  eine Karte von  $M$ .

- (b) Sei  $f : M \rightarrow N$   $C^\infty$  und  $U$  offen in  $M$ . Dann ist  $f|_U : U \rightarrow N$   $C^\infty$ .

- (c) Sei  $f : M \rightarrow N$  stetig. Zeige:  $f$  ist genau dann  $C^\infty$ , wenn für jede glatte Abbildung  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $V$  offen in  $N$  gilt:  $g \circ f$  ist glatt.