

Proseminar zu „Analysis auf Mannigfaltigkeiten“

Roland Steinbauer

SS 2016

- Seien E, F endlichdimensionale Vektorräume und $f : E \rightarrow F$ eine Abbildung. Wann heißt f differenzierbar in einem Punkt $x \in E$? Was versteht man unter der Ableitung $Df(x)$ von f in x ?
 - Wie lautet die Kettenregel für differenzierbare Abbildungen?
 - Sei $f : E \rightarrow F$ linear. Zeige, dass $Df(x) = f$ für alle $x \in E$.
 - Sei $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ bilinear. Zeige, dass für $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ und $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ gilt:

$$Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = f(x_1, v_2) + f(v_1, x_2).$$

$$(\text{Hinweis: } Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f((x_1, x_2) + t(v_1, v_2))).$$

- Zeige, dass

$$c : (-2\pi, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(t/2))$$

eine reguläre Kurve ist, die auf dem Schnitt der Kugel um 0 mit Radius 2 mit dem Zylinder $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ liegt.

- Eine Kurve c ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung $r = 2 \cos \theta - 1$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Bestimme die Gleichung von c in kartesischen Koordinaten und zeige, dass c eine reguläre Kurve ist. Zeige, dass c einen Doppelpunkt besitzt (Skizze!). Ist das ein Widerspruch zur Regularität von c ?
- Bestimme eine Parametrisierung nach der Bogenlänge für die Kurve

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

5. Bestimme für die Kettenlinie

$$c(t) = (t, \cosh(t))$$

die Bogenlängenfunktion $s(t)$, eine Parametrisierung nach der Bogenlänge und das Frenetsche Begleitbein. Berechne die Krümmung κ und gib eine Parametrisierung für die Evolute von c an.

6. (Hauptsatz der ebenen Kurventheorie) Beweise Bem 1.2.3 aus der Vorlesung, d.h. zeige die folgenden Aussage: Sei $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf dem Intervall I . Dann existiert eine Frenet-Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ . Die Kurve c ist eindeutig bis auf Euklidische Bewegungen.

Tipp: Verwende den Ansatz $e_1(s) = (\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s)))$ und die Frenet-Gleichungen.

7. Sei $r = r(\varphi)$ die Darstellung einer Kurve c in Polarkoordinaten und sei $r' = \frac{dr}{d\varphi}$. Zeige, dass für die Bogenlänge von c gilt:

$$L_{\varphi_0}^{\varphi_1}(c) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

8. Bestimme für die Schraubenlinie

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

das Frenetsche Begleitbein sowie Krümmung und Torsion.

9. (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie) Studiere den Beweis von Theorem 1.3.3 im Skriptum zur Vorlesung.

10. (a) Zeige, dass man nahe $(x_0, y_0) = (\pi, \pi/2)$ im Gleichungssystem

$$\frac{x^4 + y^4}{x} = u, \quad \sin x + \cos y = v$$

x und y als glatte Funktionen von (u, v) schreiben kann. (Präzisiere zunächst diese Aufgabenstellung!)

- (b) Zeige, dass nahe dem Punkt $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

u und v eindeutig als glatte Funktionen von x und y festgelegt sind. Berechne $\frac{\partial u}{\partial x}$ an der Stelle $(1, 1)$.

11. (a) Zeige, dass die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ ein lokaler, aber kein globaler Diffeomorphismus ist.

- (b) Gib ein Beispiel für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, sodass $f \circ g$ C^∞ ist, aber g nicht C^∞ ist.

12. Zeige, dass der Zylinder M im \mathbb{R}^3 , der die Gleichung $x^2 + y^2 = R^2$ hat, eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension 2 im \mathbb{R}^3 ist. Gib außerdem eine lokale Parametrisierung, eine Darstellung als lokaler Graph und eine lokale Trivialisierung von M an.

13. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := y^4 - y^2 + \frac{1}{4}x^2$. Bestimme die Nullstellenmenge $M := f^{-1}(0)$ von f (Verwende z.B. *Mathematica*). Definiert f die Struktur einer Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 auf M ? Wie hängt dies mit Beispiel 2.1.7 (iii) aus der Vorlesung zusammen?

14. Zeige, dass durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + xy - y - z &= 0 \\ 2x^2 + 3xy - 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

eine Teilmannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^3 festgelegt wird. Bestimme die Dimension von M .

15. Seien M, N Teilmannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^m bzw. \mathbb{R}^n .

- (a) Sei (ψ, V) eine Karte von M und W offen in M . Dann ist auch $(\psi|_{V \cap W}, V \cap W)$ eine Karte von M .

- (b) Sei $f : M \rightarrow N$ C^∞ und U offen in M . Dann ist $f|_U : U \rightarrow N$ C^∞ .

- (c) Sei $f : M \rightarrow N$ stetig. Zeige: f ist genau dann C^∞ , wenn für jede glatte Abbildung $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit V offen in N gilt: $g \circ f$ ist glatt.