Proseminar zu „Analysis auf Mannigfaltigkeiten"

Roland Steinbauer

SS 2016

1. (a) Seien E, F endlichdimensionale Vektorräume und $f : E \to F$ eine Abbildung. Wann heißt f differenzierbar in einem Punkt $x \in E$? Was versteht man unter der Ableitung $Df(x)$ von f in x?

   (b) Wie lautet die Kettenregel für differenzierbare Abbildungen?

   (c) Sei $f : E \to F$ linear. Zeige, dass $Df(x) = f$ für alle $x \in E$.

   (d) Sei $f : E_1 \times E_2 \to F$ bilinear. Zeige, dass für $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ und $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ gilt:
   $$Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = f(x_1, v_2) + f(v_1, x_2).$$
   (*Hinweis:* $Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f((x_1, x_2) + t(v_1, v_2))$).

2. Zeige, dass
   $$c : (-2\pi, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ \ c(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2\sin(t/2))$$
   eine reguläre Kurve ist, die auf dem Schnitt der Sphäre um 0 mit Radius 2 mit dem Zylinder $(x-1)^2 + y^2 = 1$ liegt.

3. Eine Kurve c ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung $r = 2\cos\theta - 1$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$. Bestimme die Gleichung von c in kartesischen Koordinaten und zeige, dass c eine reguläre Kurve ist. Zeige, dass c einen Doppelpunkt besitzt (Skizze!). Ist das ein Widerspruch zur Regularität von c?

4. Bestimme eine Parametrisierung nach der Bogenlänge für die Kurve
   $$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)\,.$$

5. Bestimme für die Kettenlinie

$$c(t) = (t, \cosh(t))$$

die Bogenlängenfunktion $s(t)$, eine Parametrisierung nach der Bogenlänge und das Frenetsche Begleitbein. Berechne die Krümmung κ und gib eine Parametrisierung für die Evolute von c an.

6. (Haupsatz der ebenen Kurventheorie) Beweise Bem 1.2.3 aus der Vorlesung, d.h. zeige die folgenden Aussage: Sei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf dem Intervall I. Dann existiert eine Frenet-Kurve $c : I \to \mathbb{R}$ mit Krümmung κ. Die Kurve c ist eindeutig bis auf Euklidische Bewegungen.

   Tipp: Verwende den Ansatz $e_1(s) = (\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)))$ und die Frenet-Gleichungen.

7. Sei $r = r(\varphi)$ die Darstellung einer Kurve c in Polarkoordinaten und sei $r' = \frac{dr}{d\varphi}$. Zeige, dass für die Bogenlänge von c gilt:

$$L_{\varphi_0}^{\varphi_1}(c) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

8. Bestimme für die Schraubenlinie

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

das Frenetsche Begleitbein sowie Krümmung und Torsion.

9. (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie) Studiere den Beweis von Theorem 1.3.3 im Skriptum zur Vorlesung.