

Proseminar zu „Analysis auf Mannigfaltigkeiten“

Roland Steinbauer

SS 2016

- Seien E, F endlichdimensionale Vektorräume und $f : E \rightarrow F$ eine Abbildung. Wann heißt f differenzierbar in einem Punkt $x \in E$? Was versteht man unter der Ableitung $Df(x)$ von f in x ?
 - Wie lautet die Kettenregel für differenzierbare Abbildungen?
 - Sei $f : E \rightarrow F$ linear. Zeige, dass $Df(x) = f$ für alle $x \in E$.
 - Sei $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ bilinear. Zeige, dass für $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ und $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ gilt:

$$Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = f(x_1, v_2) + f(v_1, x_2).$$

$$(\text{Hinweis: } Df(x_1, x_2)(v_1, v_2) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f((x_1, x_2) + t(v_1, v_2))).$$

- Zeige, dass

$$c : (-2\pi, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin(t/2))$$

eine reguläre Kurve ist, die auf dem Schnitt der Kugel um 0 mit Radius 2 mit dem Zylinder $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ liegt.

- Eine Kurve c ist in Polarkoordinaten gegeben durch die Gleichung $r = 2 \cos \theta - 1$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Bestimme die Gleichung von c in kartesischen Koordinaten und zeige, dass c eine reguläre Kurve ist. Zeige, dass c einen Doppelpunkt besitzt (Skizze!). Ist das ein Widerspruch zur Regularität von c ?
- Bestimme eine Parametrisierung nach der Bogenlänge für die Kurve

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$