GRUNDBEGRIFFE DER TOPOLOGIE

Roland Steinbauer
Sommersemester 2015

2 SWSTD / 3 ECTS

0 VORBEMERKUNGEN – ZUR EINSTIMMUNG

0.1. Begriffsbestimmung: WAS IST TOPOLOGIE?

Wie immer in solchen Situationen ist es schwer/unmöglich eine Definition zu geben. Ein Versuch einer Begriffsbestimmung ist:

Eine Eigenschaft (Konzept auf) einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist topologisch, falls sie (es) sich nur in Termen der Familie der offenen Mengen auf X und den Standardkonzepten der Mengentheorie ($\in, \subseteq, \cup, \cap, {}^c, \ldots$) formulieren läßt.

Topologie ist das Studium topologischer Eigenschaften von Mengen und Abbildungen. [CR]

Zitate beziehen sich auf die Literaturliste auf der Webseite der VO

Die Topologie gliedert sich in

(i) MENGENTHEORETISCHE TOPOLOGIE
[general top; point set top]

(ii) ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE [algebraic top]

ad (i): Alles, das sich allgemein über Begriffe sagen lässt, die auch nur entfernt mit „Nähe", „Konvergenz" und „allmählicher Veränderung" (Stetigkeit) zu tun haben. [J]

Schlüsselbegriffe: TC^4: topology, convergence continuity, compactness connectedness

ad (ii): Alles über die „Gestalt" von gummiartig verformbaren aber unzerreissbaren Körpern/Mengen.

ZB: Unterscheidung von Ball, Ring, Brezel via Anzahl der Löcher

In dieser VO befassen wir uns ausschließlich mit (i) [obwohl bei Kleinkindern (ii) früher ausgeprägt ist als (i)].

0.2 Wozu Topologie?

Top ist in erster Linie innermathematische Grundlagendisziplin; sie trägt wesentlich zum „Funktionieren“ vieler anderer Teilgebiete bei: (im Organvergleich etwa Leber oder Niere [MG]).

Top ist entstanden aus einer Vernetzung/Verflechtung früher getrennter Teildisziplinen; durch das Immer-wieder-zu-Tage-treten verborgener Analogien. Sie ist gewissermaßen Analogietheorie, die in die betroffenen Gebiete einwandert und sie verbindet.

Die große Stärke der Top liegt nicht nur an den Sätzen/Resultaten die sie bereitstellt, sondern auch im vereinheitlichten Begriffsapparat, den sie zur Verfügung stellt; dessen große Kraft beruht darauf, dass er in vielen abstrakten Situationen einen Anschluß an unser räumliches Vorstellungsvermögen ermöglicht. Dieses wird dadurch für unser abstraktes Denken über math. Probleme nutzbar gemacht [J].

0.3. Besonderheiten – Abstraktion vs. Anwendungen

[M. Grosser, Mathematik für Physik 4 (Funktionalanalysis); Auszug]

Besinnen wir uns auf eine der ursprünglichen Aufgaben der Mathematik in Anwendungssituationen, nämlich etwas „auszurechnen", die Lösung eines in mathematische Ausdruckweise übersetzten Problems zu ermitteln.

Besteht die Lösung in einem Zahlenwert, so ist es langfristig gesehen wenig sinnvoll, das gegebene Problem als einzelnes anzugehen: In den meisten Fällen wäre das zu schwierig oder insofern unrationell, weil man man beim nächsten Problem wieder von vorne weg zu überlegen beginnen müßte. Viel sinnvoller ist es, die Menge aller in Frage kommenden (reellen, komplexen) Zahlen mit den dort relevanten Rechenoperationen und Strukturen (Ordnung, Nähe und Distanz, Approximation) zu untersuchen und außerdem die Abbildungen dieser Menge (in einer gegebenen Gleichung entspricht ja jede Seite einer Funktion in der gesuchten Unbekannten) zu studieren. Das geschieht in der Analysis der Funktionen einer (reellen beziehungsweise komplexen) Variablen.

Analoges gilt, falls die Lösung in einem Zahlenvektor beziehungsweise in einem n-Tupel von Zahlen besteht: Wiederum bringt einen das endlose Studium von jeweils gegebenen Einzelfällen kaum weiter. Nützlicher ist es zum Beispiel im Falle linearer Gleichungssysteme, die allgemeine Lösbarkeit einschlägiger Probleme auf der Basis eines gründlichen Studiums endlichdimensionaler Vektorräume und linearer Abbildungen zu untersuchen. Im Falle nichtlinearer Gleichungen beziehungsweise Abbildungen müssen die Methoden der Analysis von Funktionen mehrerer Variabler herhalten.

Genauso stellt sich die Situation dar, wenn die Lösung eines Problems in einem noch „komplizierteren" mathematischen Objekt wie etwa einer Folge oder einer Funktion besteht. Das ist unter anderem in den unzähligen Situationen der Fall, wo eine Differential- oder eine Integralgleichung gelöst werden muß (beispielsweise zur Ermittlung der Bahn eines Himmelskörpers, der Ausbreitung einer Erdbebenwelle, der Wellenfunktion eines quantenmechanischen Systems, der Schwingung einer Membran einer gewissen Gestalt und so weiter). In einer solchen Situation ist es noch viel schwieriger, eine einzelne Aufgabe in einem „singulären Gewaltakt" zu lösen. Hier muß jeweils eine geeignete Gesamtheit von Funktionen, Folgen etc. mit den relevanten Strukturen (ein gewisser „Raum") sowie die passende Art von Abbildungen zwischen solchen Räumen studiert werden. Diese Räume sind meist komplizierter als die vertrauten Räume $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ oder Teilmengen von diesen.

0.4. Ziele & Inhalte der VO

Ziele: (1) Bereitstellung und Vertiefung der wichtigsten top Begriffe und Methoden, wie sie für einen modernen Ausbau der Analysis nötig sind.

(2) Einführung in die Grundprobleme + Denkweisen eines mod. math. Teilgebiets [CR] und das „Schmackhaftmachen" von Abstraktion.

Inhalte

$\boxed{0}$ Vorbemerkungen

$\boxed{1}$ Anschluss an die Analysis Vorlesungen
Metrische Räume 1 – Die Grundlagen

$\boxed{2}$ Topologische Räume – T ... die Grundlagen

$\boxed{3}$ Konvergenz – C

$\boxed{4}$ Stetigkeit – C^2

$\boxed{5}$ Erzeugen von Topologien – Das „innere Funktionieren" der Theorie

$\boxed{6}$ Kompaktheit – C^3

$\boxed{7}$ Zusammenhang – C^4

$\boxed{8}$ Metrische Räume 2 – Spezielle Resultate in MR

0.5. Historische Anmerkungen – Ohne Anspruch auf Vollständigkeit

~1880 Georg CANTOR (1845–1918): Mengenlehre — GRUNDSTEIN

1902 David HILBERT (1862–1943) Umgebung

1906 Maurice FRÉCHET (1878–1973) Metrische Räume, Konvergenz mittels (abz.) Folgen in allg. Räumen, Kompaktheit

1908 Frigyes RIESZ (1880–1965) Ausgehend vom Konzept Häufungspunkt Vergleich von Punkt- und Funktionsmengen — VORGESCHICHTE

1914 Felix HAUSDORFF (1868–1942) top. Räume via Umgebungen, T_2, top Eig. MR

1922 Kazimierz KURATOWSKI (1896–1980) top. R. via Hüllenoperator

1925 Pavel ALEKSANDROV (1896–1982) moderne Def top. R. via offene Mengen

1940 Nicolas BOURBAKI kategorielle Konstruktionsprinzipien

1955 J.L. KELLEY erstes Auftreten des Terminus Topologie — GESCHICHTE