Blatt 23: Differenzierbare Funktionen

$\boxed{1}$ *Partielle Ableitungen explizit.*
Gegeben sind folgende Funktionen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + 10 \qquad g(x,y) = (x^2+y^2)e^{xy}$$
$$h(x,y,z) = xyz\sin(x+y+z) \qquad j(x,y,z) = \frac{xe^y}{z}.$$

(a) Berechne alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von f, g, h, j.

(b) Berechne folgende partielle Ableitungen höherer Ordnung
D_1D_1f, D_1D_2f, D_2D_1g, D_1D_2g, $D_1D_2D_3h$, $D_2D_3D_1h$, D_1D_2j, D_2D_2j.

$\boxed{2}$ *Lösungen der Laplace-Gleichung.*

(a) Zeige, dass die Funktion $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$ die Gleichung

$$\triangle f := \frac{\partial^2 f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y} = 0$$

erfüllt, also die sog. Laplacegleichung $\triangle f = 0$ (in 2 Dimensionen) löst.

(b) Dasselbe in 3 Dimensionen für $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.
Genauer zeige, dass

$$\triangle f := \frac{\partial^2 f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z} = 0.$$

$\boxed{3}$ *Der Satz von Schwarz ist scharf.*
Berechne für die Funktion (siehe auch Blatt 22, Aufgabe $\boxed{6}$)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$D_1D_2f(0,0)$ und $D_2D_1f(0,0)$. Stimmen diese überein? Warum, bzw. warum nicht?

Tipp: Zur Berechnung der partiellen Ableitungen muss hier (mühsamerweise) auf den Differenzenquotienten zurückgegriffen werden. Zeige so zunächst, dass $D_1f(0,y) = -y$ $(y \neq 0)$ und dass $D_1f(0,0) = 0$ somit also $D_1f(0,y) = -y$ für alle y und analog $D_2f(x,0) = x$ für alle x. Die gemischten zweiten Ableitungen sind nun ganz einfach zu berechnen und führen ins Desaster...

$\boxed{4}$ *Jacobimatrizen explizit.*
Berechne die Jacobimatrizen für die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y) = (x^2+y, xy), \quad g(x,y,z) = (xyz, e^{xyz}), \quad h(x,y) = (x+y, x^2+y^2, x^2y^3).$$

Roland Steinbauer, Juni 2013

$\boxed{5}$ *Polar- und Kugelkoordinaten.*
Berechne für die Transformationen auf die sog. Ploar- bzw. Kugelkoordinaten
$f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$,
$g : (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(r\,\varphi,\theta) = (r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))$
die Jacobimatrizen. In welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ bzw $\mathbb{R}^3$ sind diese Abbildungen differenzierbar? Warum, bzw. warum nicht?

$\boxed{6}$ *Differenzierbarkeit explizit.*
In welchen Punkten ihres Definitionsbereichs sind (a) die Funktionen f, g, h, j aus $\boxed{1}$ und (b) die Funktionen f, g, h aus $\boxed{4}$ differenzierbar? Warum, bzw. warum nicht?

$\boxed{7}$ *Fehlende Differenzierbarkeit.*
Diskutiere das Peano-Beispiel (Vo. $\boxed{6}$ 2.13)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im Detail im Hinblick auf partielle Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $(0,0)$ (siehe auch Vo. $\boxed{6}$ 3.18(ii)).

$\boxed{8}$ *Spezialfall der Kettenregel.*
Zeige, dass für differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$(g \circ f)'(\xi) = \langle \operatorname{grad} g(f(\xi)), f'(\xi) \rangle \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{9}$ *Richtungsableitung explizit.*

(a) Berechne für die Funktionen f und g aus $\boxed{1}$ die Richtungsableitung jeweils im Punkt $(0,1)$ in Richtung $v = 1/\sqrt{2}\,(1,1)$. Fertige für f eine Skizze (wie in Vo. $\boxed{6}$ 3.30) an!

(b) Berechne für die Funktion h in $\boxed{1}$ im Punkt $(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$ und für j in $\boxed{1}$ im Punkt $(0,0,1)$ die Richtungsableitung jeweils in Richtung $v = 1/\sqrt{3}\,(1,1,1)$.

$\boxed{10}$ *Eigenschaften des Gradienten.*
Sei $f : \mathbb{R}^2 :\to \mathbb{R}$ differenzierbar, $\xi \in \mathbb{R}^2$ mit $f(\xi) =: a \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{grad} f(\xi) \neq 0$.

Aus Vo. $\boxed{6}$ Satz 3.32(ii) wissen wir, dass der Gradient $\operatorname{grad} f(\xi)$ die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f im Punkt ξ angibt. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $\operatorname{grad} f(\xi)$ überdies in ξ normal auf die Höhenschichtlinie $N_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) = a\}$ durch ξ steht.

Hinweis: Mache dir zunächst die Bedeutung der Aussage anhand einer Skizze (in der (x,y)-Ebene) klar. Dann beweise folgende Präzisierung obiger Aussage:

Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Kurve mit der Eigenschaft $f \circ c\,(t) = a$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (also insbesondere $f \circ c$ konstant), dann gilt $\operatorname{grad} f(c(t)) \perp c'(t)$.

Tipp: Es lohnt sich durchzuhalten! Hast du die Angabe verstanden, ist nurmehr eine ganz kurze & einfache Rechnung unter Verwendung von $\boxed{8}$ notwendig, um die Aussage zu beweisen. Viel Erfolg beim Tüfteln...

Roland Steinbauer, Juni 2013