Blatt 21: Topologie des $\mathbb{R}^n$

$\boxed{1}$ *Eigenschaften des Skalarprodukts.*
Zeige, dass das (Standard-)Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$

$$\langle x|y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 \; = \; \sum_{i=1}^{2} x_iy_i$$

die drei Grundeigenschaften (SP1)–(SP2) (siehe Vo. $\boxed{6}$ 1.3(iii)) erfüllt.

Bleibt derselbe Beweis für $\mathbb{R}^n$ gültig? Was muss geändert werden?

$\boxed{2}$ *Skalarprodukt und Euklidische Norm.*

(a) Es seien x, y Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ die Euklidische Norm. Zeige

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y\rangle.$$

Wieso kann diese Formel als Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras verstanden werden?

(b) Zeige, dass die Euklidische Norm die drei Grundeigenschaften (N1)–(N3) (siehe Vo. $\boxed{6}$ 1.3(ii)) erfüllt.
Tipp: Für die Dreiecks-Ungleichung verwende (a) und die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

$\boxed{3}$ *Euklidische Metrik.*
Es sei $d(x,y) = \|x-y\|$ die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeige, dass d die drei Grundeigenschaften (M1)–(M3) (siehe Vo. $\boxed{6}$ 1.3(i)) erfüllt.

(b) Diskutiere, warum (M1)–(M3) genau die Eigenschaften sind, die man sich von einem „anständigen Abstandsbegriff" erwarten kann.

$\boxed{4}$ *Freiwillig aber lustig: $\| \; \|_1$, $\| \; \|_2$ und $\| \; \|_\infty$ auf* $\mathbb{R}^2$.

(a) Wiederhole die Definition der 1-Norm und der ∞-Norm auf $\mathbb{R}^2$ und zeige, dass sie jeweils die 3 Grundeigenschaften (N1)–(N3) (siehe Vo. $\boxed{6}$ 1.3(ii)) erfüllen.

(b) Für folgende Vektoren im $\mathbb{R}^2$ berechne jeweils die $1-$, $2-$ und ∞-Normen

$$x = (1,0),\;\; y = (1,1),\; z = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}),\; v = (1/2, 1/2),\; w = (-1,-1).$$

(c) Eine Konsequenz aus (b) ist, dass für $y = (1,1)$ gilt $\|y\|_\infty \le \|y\|_2 \le \|y\|_1$. Gibt es auch Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_\infty \ge \|x\|_2 \ge \|y\|_1$? Warum bzw. warum nicht?
Tipp: Beachte die „Schachtelung" der Einheits-„Kreise" der jeweiligen Normen aus $\boxed{6}$ 1.7(ii).

Roland Steinbauer, Mai 2013

$\boxed{5}$ *Offene, **ab**geschlossene und beschränkte Mengen.*
Untersuche an Hand einer Skizze folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ auf die Eigenschaften offen, abgeschlossen und beschränkt.

(a) $K_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - a\| \leq r\}$ $(a \in \mathbb{R}^2,\ r > 0)$ (b) $Q = [0, 1) \times [0, 1)$

(c) $S = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2\}$ (d) $R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 < 3\}$ (e) $S \cap K_3(0)$

$\boxed{6}$ *Verkehrte Dreiecksungleichung.*
Beweise für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x + y\| \geq \|x\| - \|y\|.$$

Tipp. Gehe wie im Falle des Betrags auf $\mathbb{R}$ vor.

$\boxed{7}$ *Folgen in $\mathbb{R}^n$ explizit.*
Skizziere[1] die gegebenen Folgen in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Sind sie beschränkt, konvergent, besitzen sie konvergente Teilfolgen?

(a) $x^{(n)} = \left(\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ (b) $y^{(n)} = \left(\left(-\frac{n+1}{n}\right)^n, (-1)^n\right)$

(c) $v^{(n)} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \frac{n}{\log(1+n)}\right)$ (d) $w^{(k)} = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), n\right)$

$\boxed{8}$ *Folgerung aus dem Prinzip der koordinatenweisen Konvergenz 1.*
Beweise folgende in $\boxed{6}$ Bem. 1.24 thematisierte Behauptung: Für Folgen $(x^{(k)})$ und $(y^{(k)})$ in $\mathbb{R}^n$ gilt

$$x^{(k)} \to a,\ y^{(k)} \to b \quad \Rightarrow \quad x^{(k)} + y^{(k)} \to a + b \qquad (k \to \infty).$$

$\boxed{9}$ *Folgerung aus dem Prinzip der koordinatenweisen Konvergenz 2.*
Beweise das Cauchyprinzip für $\mathbb{R}^n$, d.h. die Aussage $\boxed{6}$ Kor. 1.26(i)

$$x^{(k)} \text{ konvergiert} \ \Leftrightarrow\ x^{(k)} \text{ is Cauchy-Folge}$$

durch Rückgriff auf den eindimensionalen Fall.

$\boxed{10}$ *Abschluss und kompakte Mengen.*

(a) Welche der Mengen $K_r(a)$, Q, S, R bzw. $S \cap K_3(0)$ aus Aufgabe 5 sind kompakt?

(b) Für die nicht abgeschlossenen Mengen aus Aufgabe 5 bestimme jeweils den Abschluss. Sind diese kompakt?

[1] Computerunterstützung erwünscht: Der einschlägige Mathematica-Befehl zum Plotten von Folgen in (einer und) zwei Dimensionen lautet `ListPlot`. Er erwartet sich als Argumente eine Liste von Vektoren; um so etwa einen Plot der ersten 20 Glieder der Folge $x^{(n)} = (1/n, 1/n)$ zu generieren verwende `ListPlot[Table[{1/n,1/n},{n,1,20}]]`. Zum Plotten von Folgen in $\mathbb{R}^3$ verwende `Graphics3D` und `Point`, wieder in Kombination mit `Table`.

Roland Steinbauer, Mai 2013