Blatt 19: Funktionenreihen und Potenzreihen

1 *Epsilon-Streifen explizit.*
Wir betrachten die Exponentialreihe $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ auf $x \in [-1,1]$. Laut Vo. 5 1.9 bzw. 1.18(i) konvergiert s_n auf $[-1,1]$ gleichmäßig gegen exp. Daher gibt es für jeden „ε-Streifen" $U_\varepsilon(\exp) = \{g : [-1,1] \to \mathbb{R} : \ \|g - \exp\|_\infty < \varepsilon\}$ ein $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$s_n \in U_\varepsilon(\exp) \quad \forall n \geq N.$$

Bestimme das minimale N für für $\varepsilon = 1/10$ sowohl graphisch[1], als auch rechnerisch (Tipp: Restgliedabschätzung für die Exponentialreihe, Vo. 1 4.42).

2 *Funktionenreihen: Konvergenz explizit.*
Betrachte die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^2}{1+n^2x^2}$ $(n \geq 1)$.

(a) Skizziere[1] f_n und $\sum_{k=1}^{n} f_k$ für geeignete (kleine) n.

(b) Konvergiert f_n? Ist diese Konvergenz punktweise und/oder gleichmäßig?

(c) Zeige, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergiert.

(d) Definiert $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ eine stetige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

3 *Funktionenreihen: Grenzfunktion explizit.*
Sei q eine fixe Zahl mit $0 < q < 1$. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_k(x) = (-1)^k x^k \qquad (x \in [0,q],\ k \geq 0).$$

(a) Skizziere[1] f_n und $\sum_{k=0}^{n} f_k$ für geeignete (kleine) n.

(b) Zeige, dass die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ absolut konvergiert

(c) Berechne die Grenzfunktion. *Tipp:* Geometrische Reihe, was sonst?

(d) Zeichne die Grenzfunktion in deiner Skizze aus (a) ein. Was läßt sich daran bzgl. der Konvergenz in $x = 1$ ablesen?

4 *Eine berühmte Reihendarstellung.*

Wir betrachten weiter die Funktionenreihe aus 3, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$ $(x \in [0,q],\ 1 < q < 1)$.

(a) Überlege, dass die Summation mit der Integration auf $[0,t]$ $(0 < t < q)$ vertauscht und führe die entsprechenden Rechnungen aus. Gewinne daraus eine Reihendarstellung für die Stammfunktion der Grenzfunktion aus 3 (c).

(b) Stelle Funktionenreihe und Grenzfunktion in einer Skizze dar[1].

[1]Computerunterstützung explizit erwünscht!

Roland Steinbauer, März 2013

$\boxed{5}$ *Potenzreihen explizit, 1.*
Für die gegebenen Potenzreihen bearbeite die folgenden Punkte.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2} \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\,2^n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^{2n+1}$$

- Gib explizit den Entwicklungspunkt x_0 und die Koeffizienten a_n an.
- Berechne den Konvergenzradius R.
- Untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten $x_\pm = x_0 \pm R$.
- Fertige eine Skizze an.

$\boxed{6}$ *Konvergezverhalten von Potenzreihen.*
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Bearbeite die folgenden Punkte und fertige entsprechende Skizzen an:

(a) Fasse die Ergebnisse aus der Vorlesung zur Konvergenz von Potenzreihen im Fall $0 < R < \infty$ zusammen. Insbesondere beschreibe den Unterschied zwischen „gleichmäßiger Konvergenz auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $K_r(z_0)$ mit $r < R$" und „punktweiser Konvergenz auf der offenen Kreisscheibe $B_R(z_0)$".

(b) Fasse die Ergebnisse aus der Vorlesung zur Konvergenz von Potenzreihen in den Fällen $R = 0$ bzw. $R = \infty$ zusammen.

$\boxed{7}$ *Potenzreihen explizit, 2.*
Für die gegebenen Potenzreihen bearbeite die folgenden Punkte.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3+n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{3^n(2n+1)}\, z^n \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} (x+2)^n (1+\frac{1}{n})^n$$

- Gib explizit den Entwicklungspunkt z_0 und die Koeffizienten c_n an.
- Berechne den Konvergenzradius R.
- Untersuche das Konvergenzverhalten an den reellen Randpunkten von $B_R(z_0)$.

$\boxed{8}$ *Potenzreihen explizit, 3.*
Bestimme jeweils den Konvergenzradius und finde die Summenfunktion der angegeben Potenzreihe auf dem Intervall $(-R, R)$. Untersuche auch das Konvergenzverhalten in den Randpunkten $x_\pm = \pm R$.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ *Tipp:* $n^2x^n = x^2(x^n)'' + x(x^n)'$, Vo. $\boxed{5}$ 2.15 und die geom. Reihe.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$ *Tipp:* Auf (a) zurückführen!

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *Tipp:* $\frac{x^n}{n} = \int_0^x t^{n-1}dt$

Roland Steinbauer, März 2013