PRÜFUNGSAUSARBEITUNG S. TERITIN

1 (a) $f_n \to f$ pktw $:\Leftrightarrow \forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N$
$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

glm $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \in A$
$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Bei der glm Konvergenz muss also bei fixem ε das N (gleichmäßig) für alle Pkte x wählbar sein. Daher ist glm Konvergenz der stärkere Begriff.

(b) SATZ: Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Fkt auf $A \subseteq \mathbb{C}$, die glm gegen ein $f: A \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$

$\overset{f_n \to f \text{ glm}}{\Longrightarrow} \exists N\ \forall x \in A\ \ |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \quad (*)$

$\overset{f_N \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0\ \forall x' \in A$ mit $|x - x'| < \delta$

$|f_N(x) - f_N(x')| < \varepsilon/3 \quad (**)$

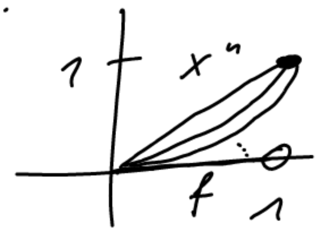
Daher gilt $\forall x' \in A$ mit $|x' - x| < \delta$

$|f(x) - f(x')| \overset{\Delta\text{-Ugl}}{\leq} |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x')|$
$+ |f_N(x') - f(x')|$
$\overset{(*),(**)}{<} \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$ $\square$

Dieser Beweis wird oft als klassischer $\varepsilon/3$-Beweis bezeichnet. Wegen der glm. Konv. ist $f_N(x)$ nahe $f(x)$ für N groß genug und $x \in A$ beliebig. Weiter ist f_N stetig, also $f(x)$ nahe $f(x')$ falls x und x' nahe sind. Kombiniert man nun diese Abschätzung (die 1. 2-mal) dann ergibt sich mittels Δ-Ugl mühelos die Stetigkeit von f.

[1] (c) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \xrightarrow[\text{pktw}]{} f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

Die f_n sind stetig, f jedoch nicht.



[2] (a) Falls eine PR einen KR R mit $0 < R < \infty$ besitzt,
dann konvergiert die PR pktw auf $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ und konv sogar abs & glm auf jedem $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$ mit $r < R$. Sie divergiert auf $(K_R(z_0))^c = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R\}$. Auf $S_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ kann keine allg. Aussage gemacht werden (sowohl Konv. als auch Div. sind möglich).

(b) Beweis: $f^{(n+1)}(x) = 0 \implies f^{(n+1)}$ stetig $\implies f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$.
Daher können wir den Satz v. Taylor verwenden
$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + R_{n+1}(x) \qquad (x_0 \text{ beliebig})$$
Weil $f^{(n+1)}(x) = 0 \implies R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0$
$(\xi$ zw. $x, x_0)$
$\implies f(x) = T_n[f, x_0](x)$, also Polynom vom Grad $\le n$ $\square$

12 (c) $f(x) = e^x \sin(x)$

- $T_3[f,0](x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(x)\frac{x^3}{6}$

$f(x) = e^x \sin(x) \quad \underline{f(0) = 0}$

$f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x))$

$\underline{f'(0) = 1}$

$f''(x) = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + e^x(\cos(x) - \sin(x))$

$= 2e^x \cos(x); \quad \underline{f''(0) = 2}$

$f'''(x) = 2e^x \cos(x) - 2e^x \sin(x) = 2e^x(\cos(x) - \sin(x))$

$\underline{f'''(0) = 2}$

$\Rightarrow T_3[f,0](x) = 0 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3$

$= \underline{x + x^2 + 1/3\, x^3}$

- $f''''(x) = 2e^x(\cos(x) - \sin(x)) + 2e^x(-\sin(x) - \cos(x))$

$= \underline{-4e^x \sin(x)}$

$\Rightarrow R_4(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 \quad$ für ein $\xi \in [-x, x]$

$= -4e^{\xi}\sin(\xi)\frac{x^4}{24}$

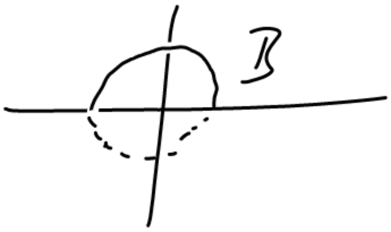
$\Rightarrow |R_4(x)| \le e^{\xi}\frac{|x|^4}{6} \underset{|x| \le 1}{\le} e/6 \approx 0{,}45$

13) (a) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Umgebung für $x \in \mathbb{R}^n$, falls $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq U$. $\left(U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \varepsilon\}\right)$

$K_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 / |x| \le 1\}$ ist abg. Umgebung von $(0,0)$

(b) $\emptyset, \mathbb{R}^n$ sind offen & abg im $\mathbb{R}^n$
(Es sind die einzigen solchen Mengen)

Eine weder offene noch abg TM des $\mathbb{R}^2$ ist



$$B = \{(x,y) / y \ge 0, \|(x,y)\| \le 1\}$$
$$\cup \{(x,y) / y < 0, \|(x,y)\| < 1\}$$

14) (a) $f: \mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ heißt diffbar in $a \in G$, falls
$\exists A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear
$\exists \delta > 0 \ \exists r: \mathbb{R}^n \supseteq U_\delta(0) \to \mathbb{R}^m$ sodass

$$f(a+h) - f(a) = A \cdot h + r(h) \quad \forall h \in U_\delta(0) \text{ mit } a+h \in G$$

und $\frac{r(h)}{\|h\|} \to 0 \quad (h \to 0)$

(b) Es gilt folgender Zusammenhang für grad und Richtungsableitungen

$$D_v f(\xi) = \langle \operatorname{grad} f(\xi) | v \rangle$$

und wegen der Cauchy Schwarz Ungl

$$|D_v f(\xi)| \leq \|\text{grad} f(\xi)\| \qquad (\|v\|=1)$$

Falls grad$f(\xi) \neq 0$ ist $v := \dfrac{\text{grad} f(\xi)}{\|\text{grad} f(\xi)\|}$ ein Richtungsvektor

und es gilt

$$D_v f(\xi) = \frac{1}{\|\text{grad} f(\xi)\|} \langle \text{grad} f(\xi) | \text{grad} f(\xi) \rangle$$

$$= \|\text{grad} f(\xi)\|.$$

Also ist in Richtung von v also in Richtung des Grad der Anstieg maximal.

14) (c)

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} yx^{y-1}e^{z} & \log(x)x^{y}e^{z} & x^{y}e^{z} \\ \cos(x)\cos(yz) & -z\sin(x)\sin(yz) & -y\sin(x)\sin(yz) \end{pmatrix}$$

Ja, weil auf D ist $Df(x,y,z)$ stetig, daher $f \in C^1(D)$ und insbes. dort diffbar.

15) (a) Ein Vektorfeld $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Gradientenfeld, falls $\exists \varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $v = \text{grad}\,\varphi$; φ heißt dann Stammfkt von v.

(b) Sei $\gamma: [a,b] \to G$ ein C^1 Weg mit $\gamma(a)=p$, $\gamma(b)=q$. Wir definieren $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ als $F = \varphi \circ \gamma$. Dann gilt

$$F'(t) = \varphi(\gamma(t))' \overset{KR}{=} \langle \text{grad}\,\varphi(\gamma(t)) | \dot{\gamma}(t) \rangle =$$

$$\underset{v=\text{grad}\varphi}{=} \langle v(\gamma(t)) | \dot{\gamma}(t) \rangle \qquad (*)$$

Damit erhalten wir

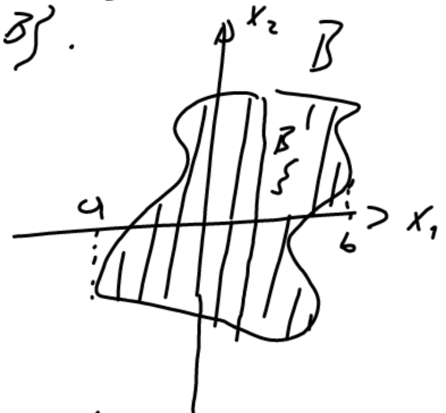
$$\int_\gamma V \underset{\text{Def Wegint.}}{=} \int_a^b \langle V(\gamma(t)) \,|\, \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt \overset{(*)}{=} \int_a^b F'(t)\,dt$$

$$\overset{HSDI}{=} F(b) - F(a) \overset{\text{Def } F}{=} \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \underline{\varphi(q) - \varphi(p)}$$

$\square$

$\boxed{5}$ (c) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar und $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in B$ sei die 1. Koord beschränkt gemäß $a \le x_1 \le b$ für passende $a, b \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit B_ξ ($\xi \in [a,b]$) den Schnitt von B mit der Ebene $x_1 = \xi$, d.h.
$B_\xi = \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \,/\, (\xi, x_2, \dots, x_n) \in B\}$.

Dann gilt $\boxed{|B| = \int_a^b \rho(\xi)\,d\xi}$



mit $\rho(\xi) := |B_\xi|$

Die dahinterstehende Idee ist es den Inhalt von B mittels „Salamitaktik" zu berechnen indem alle $\rho(\xi)$ „aufsummiert" werden.

$\boxed{6}$ (a) $\underline{\text{Falsch}}$; Gegenbsp schon für $n=1$: $U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$
Dann gilt $\bigcap U_n = \{0\}$, nicht offen.

(b) $\underline{\text{JA}}$, das ergibt sich leicht aus der Folgenstetigkeit und PKK.