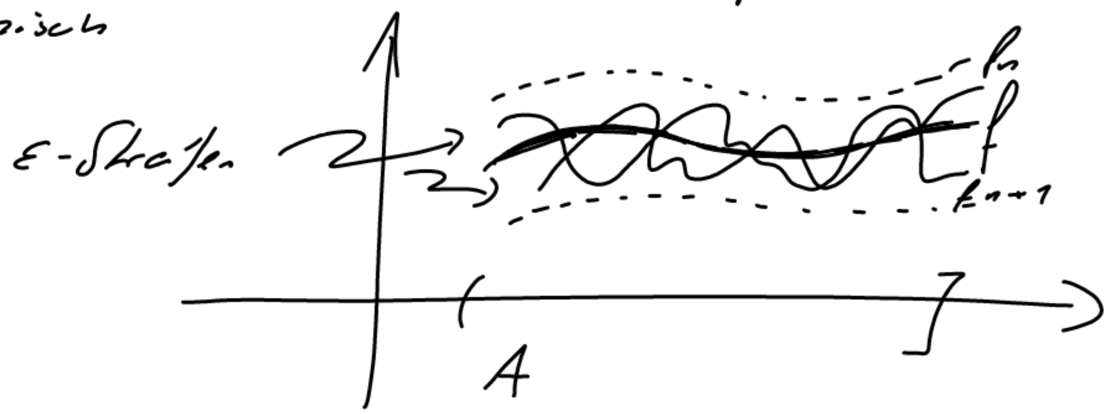
Prüfungsausarbeitung 3. Termin

[1] (a) $f_n \to f$ glm auf A, falls $\sup_{x\in A} |f_n(x)-f(x)| \to 0$,

also falls das Supremum (falls A kp das Maximum) der Abweichung der f_n's von f gegen 0 geht; anschaulich bedeutet das, dass die f_n's schließlich ganz in jedem ε-Streifen um f, also zwischen $f-\varepsilon$ und $f+\varepsilon$ liegen.

Graphisch



(b) Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Fkt auf $A \subseteq \mathbb{C}$ [$\mathbb{R}$]. Falls $f_n \to f$ glm, dann ist f stetig auf A.

Beweis. [Wir führen einen "$\varepsilon/3$-Beweis".]

Sei $x \in A$. Wir müssen zeigen, dass f in x stetig ist.
Sei dazu $\varepsilon > 0$.

$$f_n \to f \text{ glm} \Rightarrow \exists N \, \forall x \in A \quad |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \qquad (*)$$

$$f_N \text{ stetig} \Rightarrow \exists \delta > 0 \, \forall x' \in A: |x-x'| < \delta \Rightarrow |f_N(x') - f_N(x)| < \varepsilon/3$$

$(**)$

Daher gilt $\underline{\forall x' \in A \text{ mit } |x-x'|<\delta}$:

$$\underline{|f(x)-f(x')|} \leq |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(x')| + |f_N(x')-f(x')|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ugl}\ (*),(**)}{<} \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Somit ist f stetig in x. $\square$

Die glm Konv. haben wir verwendet um $(*)$ zu gewinnen, die Stetigkeit der Folge um $(**)$ zu gewinnen. Beide Abschätzungen fließen via Δ-Ugl direkt in die entscheidende Abschätzung ein.

[11] (c) <u>Lemma</u> (Riemann-Lebesgue) Sei $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$F(k) := \int_a^b f(t)\sin(kt)\,dt \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

<u>Interpretation:</u> Für $k \to \infty$ ist $\sin(kt)$ eine schnell oszillierende Fkt. Im Integral mittelt diese schöne Fkt ($\in C^1$) heraus.

$f(x)\sin(kx)$

pos+negative Flächen löschen sich aus.

12 (a) [Majorisierung durch geom. Reihe gibt Voraussetzung f. Weierstraß]

Wir setzen $f_n(z) = c_n (z - z_0)^n \quad (n \in \mathbb{N},\ z \in K_r(z_0))$

Dann können wir rechnen (Trick!)

$$|f_n(z)| = |c_n| |z - z_0|^n = c_n |z_1 - z_0|^n \underbrace{\left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^n}_{} \quad (*)$$

lt. Vorauss $\longrightarrow \leq \frac{r}{|z_1 - z_0|} =: \theta < 1$

Laut Voraussetzung konvergiert $\sum c_n (z_1 - z_0)^n$

$\overset{\text{„Dual-Test"}}{\Longrightarrow} c_n (z_1 - z_0)^n \to 0 \quad (n \to \infty)$

konv $\Longrightarrow \exists M : |c_n| |z_1 - z_0|^n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (**)$

$\hookrightarrow$ beschr

Insgesamt haben wir mit $(*)$, $(**)$:

$$|f_n(z)| \leq M \theta^n \quad \forall z \in K_r(z_0)\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Das bedeutet aber nichts anderes als $\|f_n(z)\|_{\infty, K_r(z_0)} \leq M \theta^n$ und weil $\theta < 1$ ergibt sich mittels geom. Reihe, dass $\sum \|f_n\|_{\infty, K_r(z_0)} < \infty$.

Daher gelten die Voraussetzungen des Satzes v. Weierstraß und wir erhalten

$$\sum c_n (z - z_0)^n \quad \text{konvergiert abs \& glm auf } K_r(z_0)$$

]

12 (b) Der Konvergenzradius R einer PR $\sum c_n (z-z_0)^n$ ist definiert als

$$\underbrace{R = \sup\{r \in [0,\infty) : \sum c_n (z-z_0)^n \text{ konv in } K_r(z_0)\}}.$$

13 (a) $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls sie Umgebung eines jeden ihrer Pkte ist, d.h. $\forall x \in U \; \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, falls $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Die Komplementbildung in der Def von abg. verleitet zum Irrglauben, dass „abg das Gegenteil von offen ist", d.h. eine Menge entweder offen oder abg ist.
Es gibt aber Mengen die weder offen noch abg sind z.B. $[0,1)$ und solche die offen und abg sind: $\emptyset, \mathbb{R}^n$.

(b) Satz: Jede beschränkte Folge $(x^{(k)})_k$ in $\mathbb{R}^n$ hat eine konv. Teilfolge.

Beweis: [Mittels PKK sukzessive auf den 1D-Fall zurückführen]

$x^{(k)}$ beschr $\Rightarrow$ $x_j^{(k)}$ beschränkt $\forall 1 \leq j \leq n$

Insbes $x_1^{(k)}$ beschr $\overset{BW}{\underset{1D}{\Longrightarrow}} \exists$ konv. TF $\left(x_1^{(k_\ell)}\right)_\ell$

Betrachte nun $\left(x_2^{(k_\ell)}\right)_\ell$: Ist als TF der beschr. Folge $(x_2^{(k)})_k$ beschr $\overset{BW}{\Longrightarrow} \exists$ konv. TF $\left(x_2^{(k_{\ell_m})}\right)_m$

Betrachte nun $\left(x_3^{(k_{\ell_m})}\right)_m$ ---- usw

$\vdots$

$\Longrightarrow \exists$ konv. TF $\left(x_n^{(k_{\ell_{m\dots s}})}\right)_s$

Füge nun die Komponenten-TF zusammen zur Folge $\left(x^{k_{\ell\dots s}}\right)_s$. Jede ihrer Komponentenfolgen $x_j^{(k\dots)}$ konvergiert $\overset{PKK}{\Longrightarrow}$ $\left(x^{k_{\ell\dots s}}\right)_s$ konvergiert. $\square$

$\boxed{14}$ (a) $f:\mathbb{R}^n \supseteq G \to \mathbb{R}^m$ heißt diffbar in $\xi \in G$, falls

$\exists$ lin. Abb $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\exists \delta > 0$ $\exists r: \mathbb{R}^n \supseteq U_\delta(0) \to \mathbb{R}^m$:

$$f(\xi+h)-f(\xi) = Ah + r(h) \quad \forall h \in U_\delta(0) \text{ mit } \xi+h \in G$$

und $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$.

Nein, z.B. ist die Peano-Fkt $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0) = 0$ zwar partiell diffbar [$f(0,y) = 0 = f(x,0)$ $\Rightarrow$ part Abl. $=0$] aber nicht einmal stetig [siehe $\boxed{7}$(a)] und daher auch nicht diffbar.

(b) $f(x) = Bx \Longrightarrow$

$$f(\xi+h)-f(\xi) = B(\xi+h) - B\xi = Bh$$

Also können wir in obiger Def $A = B$ und $r(h) = 0$ setzen und erhalten, dass f (in jedem Pkt) diffbar ist mit Ableitung $Df(\xi) = B$ ($\forall \xi \in \mathbb{R}^n$).

$\boxed{5}$ (a) ?? $D_1 v_2 = D_2 v_1$

$$D_1 v_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2 - x2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_2 v_1 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-(x^2+y^2)+y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

✓

(b) Zeige, dass $\int_{S^1} v \neq 0$ für den Einheitskreis S^1 im $\mathbb{R}^2$.

Damit ist dann $\oint v \neq 0$ zumindest für einen geschlossenen Weg, daher die Integrale von v nicht wegunabhängig und v kein Gradientenfeld.

S^1: $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$

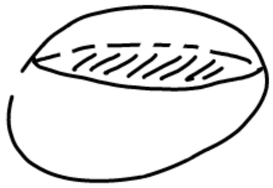
$\Rightarrow \dot\gamma(t) = (-\sin(t), \cos(t))$

$$\Rightarrow \int_{S^1} v = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle}_{\sin^2(t)+\cos^2(t)=1} dt = \int_0^{2\pi} dt = \boxed{2\pi}$$

(c) Das Problem ist das „Loch" im Def.bereich $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Dieser ist damit nicht sternförmig und nur auf sternförmigen Gebieten gilt für C^1-vf

Integrabilitätsbed. $\Rightarrow$ Gradientenfeld

6 (a) [Verwende das Prinzip von Cavalieri]



B_ξ

B

$$B = \int_{-1}^{1} |B_\xi| \quad \text{und}$$

B_ξ ist Kreisscheibe mit Radius $\sqrt{1-\xi^2}$

also $|B_\xi| = (1-\xi^2)\pi$

B_ξ

$$\Rightarrow B = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)\pi \, d\xi = \pi\left(\xi - \xi^3/3\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left(1 - \tfrac{1}{3} - \left(-1 + 1/3\right)\right) =$$

$$= \pi\,(2 - 2/3) = \underline{\underline{4/3\,\pi}}$$

(b)

$$Df = \begin{pmatrix} y\sin(z)e^{xy\sin(z)} & x\sin(z)e^{xy\sin(z)} & xy\cos(z)e^{xy\sin(z)} \\ \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} & \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} & 0 \end{pmatrix}$$

7 (a) <u>Falsch</u>: Das Peano-Bsp [siehe 4 (a)] ist ein Gegenbsp. f ist part diffbar in $(0,0)$ mit Ableitg jeweils 0 aber $(x^{(n)}) = (1/n, 1/n) \to (0,0)$ und $f(1/n, 1/n) = \dfrac{1/n^2}{1/n^2 + 1/n^2} = \underline{1/2 \neq 0}$ also f nicht stetig.

(b) <u>FALSCH</u>. Für $f(x) = e^{-1/x^2}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ gilt $\forall n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(0) = 0$ daher $T_n[f, 0](x) = 0$ was $\forall x \in \mathbb{R}$ trivialerweise konvergiert aber nicht gegen f.