Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Note:

Reelle Analysis in mehreren und komplexe Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Sommersemester 2013

5. Prüfungstermin (16.5.2014)

Gruppe A

1. *Funktionenfolgen.*
   (a) Für Funktionenfolgen $f_n : \mathbb{R} \supseteq A \to \mathbb{R}$ vergleiche die Begriffe punktweise und gleichmäßige Konvergenz. (2 Punkte)
   (b) Der gleichmäßige Limes stetiger Funktionenfolgen ist stetig. Formuliere den entsprechenden Satz ausführlich, beweise ihn und beschreibe den Beweisgang in Worten. (5 Punkte)
   (c) Diskutiere explizit ein Beispiel dafür, dass der punktweise Limes stetiger Funktionenfolgen im allgemeinen nicht wieder stetig ist. Fertige eine Skizze an. (2 Punkte)

2. *Potenz- und Taylorreihen.*
   (a) Diskutiere das Konvergenzverhalten von Potenzreihen mit Konvergenzradius $0 < R < \infty$. (Wo konvergiert die Reihe, wo konvergiert sie gleichmäßig und wo divergiert sie? Kann man in allen Punkten eine allgemeine Aussage über Konvergenz bzw. Divergenz treffen?) (3 Punkte)
   (b) Beweise: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist f ein Polynom vom Grad höchstens n. (2 Punkte)
   (c) Bestimme das Taylorpolynom $T_3[f, 0]$ von
   $$f(x) = e^x \sin(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
   an der Stelle $x_0 = 0$. Bestimme die Lagrange-Form des Restglieds $R_4(x)$ und gib eine Abschätzung für $|R_4(x)|$ auf $[-1, 1]$ an. (4 Punkte)

3. *Topologie des $\mathbb{R}^n$.*
   (a) Definiere den Begriff einer Umgebung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ und gib eine abgeschlossene Umgebung für $x = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ an. (2 Punkte)
   (b) Gib je eine offene und abgeschlossene und eine weder offene noch abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ an. (2 Punkte)

Bitte umblättern

4. *Differentialrechnung.* Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

   (a) Definiere den Begriff der Differenzierbarkeit für $f : G \to \mathbb{R}^m$ in einem Punkt $\xi \in G$. (2 Punkte)

   (b) Diskutiere folgende Aussage für differenzierbare $f : G \to \mathbb{R}$: Der Gradient gibt die Richtung des größten Anstiegs an. (3 Punkte)

   (c) Berechne die Jacobi-Matrix der Funktion $f : D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\} \to \mathbb{R}^2$

   $$f(x, y, z) = (x^y\, e^z, \sin(x)\cos(yz)) \qquad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

   Ist f auf ganz D differenzierbar? Warum (nicht)? (3 Punkte)

5. *Integralrechnung.*

   (a) Definiere den Begriff eines Gradientenfelds auf $\mathbb{R}^n$. (1 Punkt)

   (b) Sei v ein stetiges Gradientenfeld auf dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Stammfunktion φ. Beweise, dass v wegunabhängige Integrale hat, d.h. dass für alle $p, q \in G$ und alle $\mathcal{C}^1$-Wege γ von p nach q, die ganz in G liegen gilt, dass

   $$\int_\gamma v = \varphi(q) - \varphi(p).$$

   Begründe jeden deiner Beweisschritte! (3 Punkte)

   (c) Formuliere das Prinzip von Cavalieri und diskutiere die zugrundeliegenden Idee. Fertige eine Skizze an! (2 Punkte)

6. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an. (Je 2 Punkte)

   (a) Der Durchschnitt beliebig vieler offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ist offen.

   (b) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m > 1)$ ist genau dann stetig, falls alle ihre Komponentenfunktionen stetig sind.