Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl(en):

1	2	3	4	5	6	7	$\sum$

Note:

Reelle Analysis in mehreren und komplexe Analysis in einer Variable für LAK

Roland Steinbauer, Sommersemester 2013

2. Prüfungstermin (20.9.2013)

Gruppe A

1. *Funktionenfolgen und -reihen.*
   (a) Für Funktionenfolgen $f_n : \mathbb{R} \supseteq A \to \mathbb{R}$ vergleiche die Begriffe punktweise und gleichmäßige Konvergenz. (2 Punkte)
   (b) Formuliere und beweise den Satz von Weierstraß. Begründe deine Beweisschritte! (5 Punkte)

2. *Potenzreihen*
   (a) Definiere den Begriff einer reellen Potenzreihe. (1 Punkt)
   (b) Was kann man sich intuitiv unter einer Potenzreihe vorstellen? Handelt es sich dabei um „einfache" oder „komplizierte" Funktionen? (2 Punkte)
   (c) Wie können hinreichend schöne $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in eine Potenzreihe entwickelt werden? Funktioniert das für alle $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen? (3 Punkte)

3. *Topologie des $\mathbb{R}^n$.*
   (a) Formuliere und Beweise das Prinzip der koordinatenweisen Konvergenz (PKK) auf dem $\mathbb{R}^n$. Begründe deine Beweisschritte! (3 Punkte)
   (b) Definiere den Begriff einer kompakten Teilmenge der $\mathbb{R}^n$ und formuliere den Satz von Heine-Borel. (2 Punkte)

4. *Stetigkeit und Differenzierbarkeit.*
   (a) Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiere die Begriffe Stetigkeit und partielle/separate Stetigkeit im Punkt $(0, 0)$ und diskutiere ihre Beziehung zueinander. (3 Punkte)
   (b) Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiere den Begriff der partiellen Ableitungen und der Richtungsableitung in einem Punkt. Was haben diese beiden Begriffe miteinander zu tun? (3 Punkte)

Bitte umblättern!

5. *Differential- und Integralrechnung.*
   (a) Formuliere den Satz über implizite Funktionen im $\mathbb{R}^2$ und diskutiere seine Bedeutung. (4 Punkte)
   (b) Definiere den Begriff des Wegintegrals.
   Wie kann das Wegintegral verwendet werden, um eine Stammfunktion für ein Vekorfeld mit wegunabhängigen Integralen zu berechnen? Was hat das mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu tun? (3 Punkte)

6. *Rechenaufgaben.*
   (a) Gib ein beliebiges Gradientenfeld auf dem $\mathbb{R}^2$ an. (1 Punkt)
   (b) Berechne das Volumen der Einheitskugel, also den Inhalt $|B|$ der Menge $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. (2 Punkte)
   (c) Berechne die Jacobi-Matrix der Funktion $f(x, y, z) := (\cos(yz), \sin(xz), e^{xy^2z})$. (2 Punkte)

7. *Richtig oder falsch?*
   Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an. (Je 2 Punkte)
   (a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Funktion. Dann existiert ihre Jacobi-Matrix $Df(\xi)$ in jedem Punkt $\xi \in \mathbb{R}^n$ und ist eine $(n \times m)$-Matrix.
   (b) Jedes stetig differenzierbare Gradientenfeld erfüllt die Integrabilitätsbedingungen.