8 Komplexe Analysis – Eine Einladung

8.1 Intro. In diesem letzten Teil der VO unternehmen wir einen kleinen Spaziergang durch die Grundlagen der komplexen Analysis – also der Analysis von Fkt

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}. \qquad (*)$$

Dieses reiche & schöne Gebiet befasst sich vor allem mit komplex differenzierbaren Fkt wie in (∗). Diese werden auch als holomorphe oder analytische Fkt bezeichnet – wobei es bereits ein Resultat ist, dass diese eigentlich eigenständigen Begriffe zusammenfallen.

Holomorphe Fkt sind in der gesamten Mathematik weit verbreitet und tatsächlich sind uns auch schon viele solcher Fkt begegnet: So ist etwa die komplexe Exp-Fkt [[2] 3.12] ebenso holomorph wie die Cos- & Sinusfunktion oder Polynome wenn man sie als Fkt einer komplexen Variable auffasst.

Es stellt sich heraus, dass die holomorphen Fkt erstaunliche Eigenschaften besitzen und merkwürdigen strikten Gesetzen gehorchen – die man garnicht ahnen kann, wenn man sie nur mit der „reellen Brille" ansieht.

8.2 WH: Was wir schon alles über $\mathbb{C}$ wissen

(i) $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$, wobei wir $\mathbb{C} \ni z = \underbrace{x}_{Re(z)} + i\underbrace{y}_{Im(z)}$ mit dem Paar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren.

$\mathbb{C}$ wird mit der Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

zum Körper [$\boxed{10}$ 1.4]. Die Zahl $i = (0,1)$ ist die imaginäre Einheit und erfüllt $i^2 = -1$!

$\mathbb{C}$ kann zwar nicht zu einem geordneten Körper gemacht werden, aber der komplexe Betrag [$\boxed{2}$ 3.10]

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

ermöglicht es Konvergenz von Folgen & Reihen sowie Stetigkeit von Fkt völlig analog zum reellen Fall zu betrachten [Es muss nur der reelle Betrag durch den komplexen Betrag ersetzt werden.] Es ist eine einfache Konsequenz der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$, dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert, also $\mathbb{C}$ vollständig ist [$\boxed{2}$ 3.10(H)].

8.3 Funktionen auf $\mathbb{C}$ & ihre Diffbarkeit

(i) Fkt auf $\mathbb{C}$. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen [d.h. jedes $z \in G$ besitzt eine „Schutzkugel“ $U_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}$, die ganz in G liegt – vgl. [[6] 1.11], $f: G \to \mathbb{C}$

Wir schreiben
$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$$

und erhalten daraus 2 reelle Fkt ($G \subseteq \mathbb{R}^2$ aufgefasst)

$$u: G \to \mathbb{R},\ u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy)$$
$$v: G \to \mathbb{R},\ v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+iy)$$

sodass

$$\boxed{f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)}$$

Vektorfeld auf $G \subseteq \mathbb{R}^2$

gilt; wir sehen dann

$$F: \mathbb{R}^2 \supseteq G \to \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

(ii) DEF $f: G \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $z_0 \in G$, falls

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{(ob eigentlicher Limes)}$$

existiert. In diesem Fall heißt der Wert $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ die komplexe Ableitung von f in z_0. Ist f in allen Punkten $z_0 \in G$ diffbar, so heißt f komplex diffbar auf G und wir erhalten die Ableitungsfkt

$$f': G \to \mathbb{C},\ z \mapsto f'(z)$$

(iii) Einfache Folgerungen: Genauso wie im Reellen zeigt man

- f komp. diffbar in $z_0 \iff \exists a \in \mathbb{C}\ \exists r: \mathbb{C} \supseteq U_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$

$$f(z_0+h) - f(z_0) = a \cdot h + r(h), \quad \frac{r(h)}{h} \to 0 \quad (\mathbb{C} \ni h \to 0)$$

- f komp. diffbar in z_0 $\Rightarrow$ f stetig in z_0

(iv) Komplexe vs reelle Diffbarkeit – die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

Wir beantworten die Frage, was eine komplex diffbare Abb $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von einer reell diffbaren Abb $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ unterscheidet.

Die Jacobi-Matrix $DF(x_0, y_0)$ im Pkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ stellt eine lin. Abb $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dar. Die komplexe Ableitung $f'(z_0)$ im Pkt $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ vermittelt die lin. Abb: $\mathbb{C} \ni z \mapsto f'(z_0) \cdot z \in \mathbb{C}$ also die Multiplikation mit der komplexen Zahl $f'(z_0)$.

Wir müssen also fragen, wann eine reelle (2×2)-Matrix die Multiplikation mit einer komplexen Zahl darstellt: Beispiel

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \longmapsto \alpha \cdot z = (a+ib)(x+iy)$$
$$= ax - by + i(ay + bx).$$

Diese Abb. wird dargestellt von

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}.$$

Also muss eine solche reelle (2×2)-Matrix von der Gestalt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sein. Für die Jacobi-Matrix von DF von $F = (u, v)$

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

bedeutet das

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Wir haben also bewiesen

SATZ: Sei $f: G \to \mathbb{C}$ mit zugeordneter Abb $F = \binom{u}{v}: G \to \mathbb{R}^2$ dann gilt:

f komplex diffbar auf G $\iff$ F reell diffbar auf G und es gilt
$$\partial_x u = \partial_y v$$
$$\partial_y u = -\partial_x v$$

die sog. Cauchy-Riemann-Differentialgl. (CRDG)

(v) Holomorphe Fkt

Wie im reellen ist es praktischer nicht bloß diffbare Fkt zu betrachten, sondern $\mathcal{C}^1$-Fkt, diese heißen holomorphe Fkt; genauer

DEF: $f: G \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, falls f auf G kompl. diffbar mit stetiger Ableitung $f': G \to \mathbb{C}$ ist.

Aus (iv) folgt sofort: f holomorph $\iff$ $\left\{\begin{array}{l} F \in \mathcal{C}^1 \text{ und es} \\ \text{gelten die (CRDG)} \end{array}\right.$

(vi) Man kann sogar zeigen:

SATZ VON GOURSAT: Jede komplex differenzierbare Fkt ist automatisch holomorph.

Siehe dazu auch 8.9.
Bemerke den großen Unterschied zur reellen Analysis

(vii) BSP. • $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ [R] 3.12]

ist holomorph, denn mit $z = x+iy$ gilt

$$e^z = e^{x+iy} \underset{[2]\,3.15}{=} e^x e^{iy} \underset{[2]\,3.17}{=} \underbrace{e^x\cos(y)}_{=:u(x,y)} + i\,\underbrace{e^x\sin(y)}_{=:v(x,y)}$$

und $\partial_x u = e^x\cos(y) = \partial_y v$

$\partial_y u = -e^x\sin(y) = -\partial_x v \Longrightarrow$ (CRDG) & C^1 $\Longrightarrow$ holomorph

- $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $h(z)=\sin(z)$

analog zu [2] 3.17(iii)

$$:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

ist holomorph mit

$$h'(z) = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} =: \cos(z)$$

- $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\varphi(z)=\bar{z}$, dh $\varphi(x+iy)=x-iy$

$u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$

$\partial_x u = 1 \neq -1 = \partial_y v \Longrightarrow$ nicht holomorph

8.4 KOMPLEXE WEGINTEGRALE

(i) Notation & Terminologie. Einen Weg $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ identifizieren wir mit dem Weg $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(x(t),y(t))$. Alle Begriffe für Wege aus [7] §1-2 übertragen sich somit auf komplexe Wege. Insbesondere entspricht $\dot\gamma(t)=\dot x(t)+i\dot y(t)$ dem Geschwindigkeitsvektor $\begin{pmatrix}\dot x(t)\\ \dot y(t)\end{pmatrix}$.

(ii) DEF (Wegintegral) Sei $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ stückweise C^1, $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ stetig, dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt$$

$\cdot$ in $\mathbb{C}$

Wegintegral von f längs γ

(iii) Reelle Schreibweise: Mittels $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$
und $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ schreibt sich (ii) ab

$$\boxed{\int_\gamma f(z) = \int_0^b f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_\gamma \begin{pmatrix}u\\-v\end{pmatrix}(t)\,dt + i\int_\gamma \begin{pmatrix}v\\u\end{pmatrix}(t)\,dt}$$

$$= \big(u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))\big)\big(\dot x(t)+i\dot y(t)\big)$$

$$= u(x(t),y(t))\,\dot x(t) - v(x(t),y(t))\,\dot y(t)$$
$$+ i\big(u(x(t),y(t))\,\dot y(t) + v(x(t),y(t))\,\dot x(t)\big)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}u(x(t),y(t))\\-v(x(t),y(t))\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}\dot x(t)\\\dot y(t)\end{pmatrix}\right\rangle + i\left\langle \begin{pmatrix}v(\dots)\\u(\dots)\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}\dot x(t)\\\dot y(t)\end{pmatrix}\right\rangle$$

(iv) Bsp. $\gamma(t)=z_0+re^{it}=z_0+r(\cos(t)+i\sin(t))$

$$\Rightarrow \quad \dot\gamma(t)=r(-\sin(t)+i\cos(t))=ire^{it}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{1}{re^{it}}\,ire^{it}\,dt$$

Kreis mit Radius r um z_0

$$= i\int_0^{2\pi}1\,dt = 2\pi i$$

und etwas allgemeiner für $m\in\mathbb{Z}$

$$\int_\gamma (z-z_0)^m\,dz = \int_0^{2\pi}(re^{it})^m\,ire^{it}\,dt = ir^{m+1}\int_0^{2\pi}e^{it(m+1)}\,dt$$

$$= ir^{m+1}\Big(\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos((m+1)t)\,dt}_{=\begin{cases}\int_0^{2\pi}dt = 2\pi & (m=-1)\\ \int_0^{2\pi(m+1)}\frac{\cos\tau}{m+1}\,d\tau = 0 & (m\neq-1)\end{cases}} + i\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin((m+1)t)\,dt}_{=0}\Big)$$

[vgl $\boxed{15}$ 4(2)]

$$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma (z-z_0)^m\,dz = \begin{cases}2\pi i & (m=-1)\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}}$$

Ein zentrales Resultat ist der folgende Satz

8.5 DER INTEGRALSATZ VON CAUCHY

offen sternf. vgl. [A] 2.5(iv)

(i) THM. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\boxed{\oint_\gamma f(z)\,dz = 0}$$

für jeden geschlossenen stückweisen $\mathcal{C}^1$-Weg γ in G.

(ii) BEM (Zur Bedeutung von (i)) Im Hinblick auf [7] §2 (vgl. insbes. [7] 2.5(vii)) kann die Bedeutung von (i) gar nicht überschätzt werden. Im Kern besagt das Thm, dass holomorphe Fkt automatisch die Integrabilitätsbedingungen erfüllen – der Beweis zeigt genauer, dass die (CRDG) die Integrabilitätsbed. sind !

(iii) Beweis: Wieder schreiben wir $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

f holomorph $\Rightarrow$ (CRDG) $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$

$\Longrightarrow$ die VF $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ erfüllen die IntBed

Daher

$$\int_\gamma f(z)\,dz \overset{8.5(iii)}{=} \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} + i \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \overset{[7]\,2.5(vi)}{=} 0 + i\,0 = 0$$

$\square$

(iv) Konsequenzen aus (i). Völlig analog zu [7] 2.4(iv) zeigt man, dass holomorphe Fkt wegunabhängige Integrale haben und analog zu [7] 2.4(iii), [7] 2.5(v) ergibt sich eine komplexe Version des HsDI. Die wichtigste Konsequenz aus dem Cauchyschen Integralsatz ist:

8.6 Die Cauchysche Integralformel

(i) Thm. Sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph auf dem Gebiet G und sei Γ ein pos. orientierter Kreis innerhalb von G. Dann gilt für jedes z innerhalb von Γ die Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

[zeta]

(ii) Bedeutung von (i): Die Formel besagt insbesondere, dass die Werte einer holomorphen Fkt innerhalb einer Kreisscheibe schon allein durch die Werte am Randkreis Γ bestimmt sind.

(iii) Beweisskizze. Seien z, Γ wie im Thm. Wähle einen kleinen Kreis Γ_0 um z der innerhalb von Γ liegt.

(1) Da $\zeta \mapsto \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ holomorph auf $G \setminus \{z\}$ ist, gilt

$$\boxed{\int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}} \quad (*)$$

denn

$$\int_\Gamma - \int_{\Gamma_0} = \int_\alpha + \int_\beta \overset{8.5(i)}{=} 0$$

Analog erhalten wir

$$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\Gamma_0} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (**)$$

(2) Wir rechnen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)+f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$$= \frac{f(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$$\overset{(*),(*)}{=} \frac{f(z)}{2\pi i}\underbrace{\int_{\Gamma_0} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{=2\pi i\ [8.4(iv)]} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta}_{=:h(z)}$$

(3) Wir zeigen $h(z)=0$; dann fertig.

f stetig $\Longrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists r_0$ Radius von Γ_0 s.d. $\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\right| < \varepsilon/r_0 \quad \forall \zeta\in\Gamma_0$

$$\Longrightarrow |h(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\right| d\zeta$$

$$< \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r_0}L(\Gamma_0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{r_0}2\pi r_0 = \varepsilon \qquad \square$$

8.7 POTENZREIHEN

(i) Intro. Wir zeigen jetzt, dass komplexe Potenzreihen holomorphe Fkt definieren. Das ist eine Erweiterung von [5] Prop 2.15, die besagt, dass reelle PR C^∞-Fkt darstellen.

Wir beginnen mit unseren Überlegungen und formulieren erst danach das Resultat.

Erinnerung: In [5] §2 haben wir ja schon einige wenige komplexe PR gelernt...

(ii) Komplexe PR. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ eine PR mit KR $R>0$ und

$$f: B_R(z_0) \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \qquad (*)$$

ihre Summenfkt. Fkt f mit einer PR-Darstellung $(*)$ heißen analytisch.

(iii) Wir wollen nun analytische Fkt kompl. differenzieren und beginnen mit einer Vorüberlegung:

Sei $z_1 \in B_R(z_0)$, $z_1 \neq z$

$$\Rightarrow (z-z_0)^k = \left((z-z_1)+(z_1-z_0)\right)^k \overset{\text{Binom. LS}}{=} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (z_1-z_0)^{k-l} (z-z_1)^l$$

$$\overset{\binom{k}{l}=0 \text{ für } l>k}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k}{l} (z_1-z_0)^{k-l} (z-z_1)^l$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{l=0}^{\infty} \binom{k}{l} (z_1-z_0)^{k-l} (z-z_1)^l$$

$$\overset{\text{abs. konv.}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \binom{k}{l} (z_1-z_0)^{k-l} (z-z_1)^l$$

$$\overset{\binom{k}{l}=0 \text{ für } k<l}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=l}^{\infty} c_k \binom{k}{l} (z_1-z_0)^{k-l} \right)}_{=: b_l \ (*)} (z-z_1)^l = \sum_{l=0}^{\infty} b_l (z-z_1)^l$$

Entwicklung mit Entwicklungspkt z_1!

Jetzt können wir den Differenzenquotienten berechnen:

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} b_l (z-z_1)^l - b_0}{z-z_1} = \frac{b_1 (z-z_1) + b_2 (z-z_1)^2 + \dots}{z-z_1}$$

$$= b_1 + b_2 (z-z_1) + b_3 (z-z_1)^2 + \dots \to b_1 \quad (z \to z_1)$$

$\Rightarrow$ f komplex diffbar in z_1 mit

$$f'(z_1) = b_1 \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \binom{k}{1} (z_1 - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (z_1 - z_0)^{k-1}$$

Weil z_1 in $B_R(z_0)$ beliebig war gilt insgesamt

- f komplex diffbar auf $B_R(z_0)$ und
- $f' : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ ist durch die gliedweise differenzierte Reihe gegeben

$\overset{[6]\,7.5}{\Longrightarrow}$ Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe ist wieder R

$\Rightarrow$ f' stetig auf $B_R(z_0)$

$\Longrightarrow$ f holomorph auf $B_R(z_0)$

Wir haben also gezeigt: analytisch $\Rightarrow$ holomorph; genauer

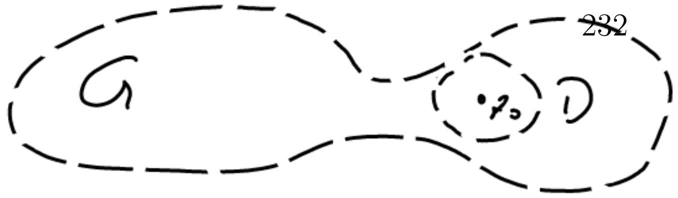
(iii) SATZ (Potenzreihen definieren holomorphe Fkt)

Sei $\sum c_k (z-z_0)^k$ eine PR mit KR R. Dann ist die Summenfkt $f(z) = \sum c_k (z-z_0)^k$ holomorph auf $B_R(z_0)$ und die Ableitung kann gliedweise berechnet werden, d.h. $f'(z) = \sum k c_k (z-z_0)^{k-1}$.

Desweiteren folgt durch Iterieren [vgl. [5] 2.15] dass analytische Fkt beliebig oft kompl. diffbar sind.

(iv) Es ist eine weitere Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz bzw. der Integralformel, dass auch eine Umkehrung von (iii) gilt. Diese besprechen wir nun.

8.8 Entwicklungssatz



(i) THM. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph.
Sei $z_0 \in G$ und $U_r(z_0)$ die größte offene Kreisscheibe mit Mittelpkt z_0 sodass $\overline{U_r(z_0)} = K_r(z_0) \subseteq G$ [vgl. [6] 1.31].
Dann gilt $\forall z \in U_r(z_0)$ eine eindeutige PR-Entwicklung

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.}$$

Dabei sind die Koeffizienten c_k gegeben durch

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz.}$$

(ii) Bemerke, dass das analoge Resultat für C^∞-Fkt auf $\mathbb{R}$ falsch ist. In [5] Bsp 3.12 haben wir gesehen, dass $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \in C^\infty(\mathbb{R})$ keine PR-Entwicklung hat — vgl [5] 3.17. Dort mussten wir die Frage offenlassen, welche reellen C^∞-Fkt eine Entwicklung haben — wir kommen ganz am Ende der VO darauf zurück.

(iii) Beweisskizze. OBdA sei $z_0 = 0$, $z \in U_r(0)$.
Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}}_{= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n} d\zeta$$

geom. Reihe $|z| < |\zeta|$ da $z \in U_r(0)$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n \underset{\text{konv. glm}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta \right) z^n \qquad \square$$

8.9 Die fabelhafte Welt der holomorphen Fkt

(i) Wie bereits in 8.1 angedeutet, sind komplex diffbare Fkt sehr „schöne" Fkt. Wir fassen unsere diesbezüglichen Resultate zusammen.

Thm. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind die folgenden Aussagen alle äquivalent.

(i) f kompl. diffbar.

(ii) f ist holomorph.

(iii) f ist analytisch, d.h. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ in einer Umgebung jedes Pkts $z_0 \in G$.

(iv) f ist beliebig oft kompl. diffbar.

(v) f ist reell $\mathcal{C}^1$ & erfüllt die (CRDG).

(vi) $\oint_\gamma f = 0$ für alle geschlossenen Wege $\gamma \subseteq U_r(z_0) \subseteq G$.

(vii) f hat in jedem Pkt eine (lokale) Stammfkt.

Beweisskizze [Fast alles haben wir schon erwähnt, viel sogar bewiesen.]

(i) kompl diffbar $\Longrightarrow$ (ii) holomorph $\xRightarrow{8.8(i)}$ (iii) analytisch

Satz v. Goursat vgl 8.3(vi)
Beweis etwa mit allgemeiner Version des Cauchy-Integralsatzes für kompl. diffbar statt holomorph

(iii) analytisch $\xRightarrow{8.3(v)}$ (v) reell $\mathcal{C}^1$ & (CRDG) $\xRightarrow{8.5(i)}$ (vi) $\oint_\gamma f = 0$

(iii) analytisch $\xRightarrow{8.7(iii)}$ (iv) bel. oft kompl. diffb. $\xRightarrow{\text{klar}}$ (i) kompl. diffbar

(vi) $\Longrightarrow$ (iii): Satz von Morera [Jänich 3 Satz 8]

(i) f kompl. db. $\Longleftarrow$ (vii) lok. Stammf. $\xLeftarrow{8.5(iv)}$ (vi)

$F' = f$ & (iv)

$\square$

(ii) Weitere schöne Eigenschaften holomorpher Fkt, (die allerdings auch zeigen, dass holomorphe Fkt sehr speziell sind) sind etwa:

SATZ v. LIOUVILLE: Jede Fkt $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph & beschränkt ist, ist schon konstant.

IDENTITÄTSSATZ. Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g: G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Fkt, die auf eine Teilmenge von G, die einen Häufungspunkt besitzt, übereinstimmen. Dann gilt $f \equiv g$ auf ganz G.

Insbesondere können sich die Nullstellen (nichttriviale) holomorpher Fkt nicht häufen. Somit ist ein Bsp wie in [5] 3.11-12 ausgeschlossen.

(iii) Holomorphe Fkt bzw. die komplexe Analysis hilft auch öfters Fragen der reellen Analysis zu beantworten; So können wir nun die Frage aus [5] 3.17 beantworten [vgl. auch 8.8(iii)]:
Eine reelle Fkt ist genau dann um einen Pkt in eine PR entwickelbar, falls sie sich auf einen Kreis um x_0 in der kompl. Ebene holomorph fortsetzen läßt; genauer

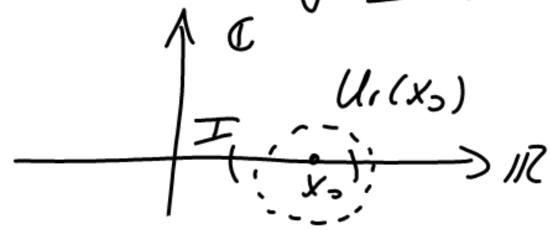
SATZ. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ eine Fkt.

f lässt sich um $x_0 \in I$ in eine (reelle) PR entwickeln

$$\Updownarrow$$

$\exists$ Fkt $g: \mathbb{C} \supseteq U_r \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g|_I = f$.

Siehe [Heuser 2, 187.6]



(iv) AUSBLICK. Die komplexe Analysis ist im Wesentlichen die Theorie der holomorphen Fkt. Ein weitreichender Gesichtspunkt dabei ist es, holomorphe Fkt als Lösungen der (CRDG) zu sehen – damit ergeben sich viele Verbindungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen (PDE).

Die Analysis von Fkt mehrerer komplexer Variablen unterscheidet sich grundlegend von der 1-d Theorie. Wiederum gibt es starke Bezüge zur Theorie der PDE aber auch der Funktionalanalysis und zur Algebraischen Geometrie.

Dabei handelt es sich um ein aktives Forschungsgebiet – [am Inst: F. Haslinger & B. Lamel]

(v) LITERATUR. Diese Ausarbeitung beruht wesentlich auf [Heuser 2, 185–187]. Eine knappe Einführung ist [Jänich, Funktionentheorie], ein umfassendes (m.E. sehr schönes) Buch [Remmert, Schumacher, Funktionentheorie 1-2].