2.5 MOTIVATION (Stetigkeit) Wir werden nun Stetigkeit von Fkt $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ untersuchen. Dazu erinnern wir uns, dass Stetigkeit für $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ zwei „Erscheinungsformen" hatte nämlich [$\boxed{2}$ 1.13]

- Umgebungsstetigkeit: die (ε-δ)-Bedingung, d.h. ($a \in D$)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

was sich in „Umgebungssprache" auch so ausdrücken lässt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\quad f(U_\delta(a) \cap D) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$$

- Folgenstetigkeit: $\forall (x_n) \in D$ mit $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

Wie im 1-d Fall werden wir die Stetigkeit als Umgebungsstetigkeit definieren, dann aber gleich sicherstellen, dass sie mit der Folgenstetigkeit übereinstimmt. Dann werden wir Stetigkeit durch die Stetigkeit der Komponentenfkt charakterisieren. Nach einigen Bsp erleben wir unsere erste große Überraschung der mehrdim Analysis.

2.6 DEF (Stetigkeit) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $a \in U$. Eine Fkt $f: U \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig in a, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U \text{ mit } \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \varepsilon$$

[d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\quad f(U_\delta(a) \cap U) \subseteq U_\varepsilon(f(a))$]

f heißt stetig auf U, falls f stetig in a, $\forall a \in U$.

Völlig analog zu $\boxed{2}$ 1.6

2.7 SATZ (Umgebungsstetig = folgenstetig) Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$, $a \in U$. Dann gilt

f stetig in a $\iff$ Für jede Folge $(x^{(k)})$ in U mit $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(a)$$

Beweis. [völlig analog zum 1-d-Fall; vgl [2] 1.12 - kürzer aufgeschrieben]

„$\Rightarrow$" Sei $(x^{(k)})$ eine Folge in U, $x^{(k)} \to a$; zz $f(x^{(k)}) \to f(a)$ in $\mathbb{R}^m$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $\delta > 0$: $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ [möglich nach 2.6]

Wähle $N \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq N$ $\|x^{(k)} - a\| < \delta$ [lt. Voraus: $x^{(k)} \to a$]

Daher gilt $\forall k \geq N$ $\|f(x^{(k)}) - f(a)\| < \varepsilon$, also $f(x^{(k)}) \to f(a)$

„$\Leftarrow$": Indir. ang f nicht stetig in a. Dann gilt

$\exists \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists x^{(k)} \in U$, $\|x^{(k)} - a\| < 1/k$ aber $\|f(x^{(k)}) - f(a)\| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow x^{(k)} \to a$ aber $f(x^{(k)}) \not\to f(a)$ ↯ $\square$

2.8 SATZ (Stetigkeit via Komponentenfkt)

Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ und sei $a \in U$. Dann gilt

f stetig in a $\iff$ $\forall 1 \leq j \leq m$: f_j stetig in a

[f ist genau dann stetig (in a), falls alle Komponentenfkt $f_1, \ldots, f_m$ stetig (in a) sind.]

Beweis. [Einfache Anwendung von 2.7 und PKK 1.22]

f stetig in $a \overset{2.7}{\iff} \forall (x^{(k)})$ in U, $x^{(k)} \to a$: $\underbrace{f(x^{(k)}) \to f(a)}$

$$\Updownarrow 1.22$$

$$\big(f(x^{(k)})\big)_j \to \big(f(a)\big)_j = f_j(a) \quad \forall 1 \le j \le m$$

$\llcorner = f_j(x^{(k)})$ per def

$$\iff \forall x^{(k)} \to a : \forall 1 \le j \le m \quad f_j(x^{(k)}) \to f_j(a)$$

$$\overset{2.7}{\iff} \forall 1 \le j \le m \quad f_j \text{ stetig in } a$$

[für jedes $f_j : U \to \mathbb{R}$] $\square$

2.9 BSP (Stetige Fkt)

(i) Konstante Fkt sind stetig: Sei $c \in \mathbb{R}^m$, dann ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = c$ $\forall x$ offensichtlich stetig auf $\mathbb{R}^n$ [$x^{(k)} \to a \Rightarrow f(x^{(k)}) = c \to c = f(a)$]

(ii) Projektionen. Sei $1 \le i \le n$. Wir definieren $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$p_i(x) = p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i \;.$$

Alle p_i $(1 \le i \le n)$ sind stetig [$x^{(k)} \to a \overset{1.22}{\Rightarrow} \forall 1 \le i \le n : x_i^{(k)} \to a_i$]

2.10 BEM („Baukasten")

Mittels des Folgenkrit. 2.7 ist es leicht zu sehen [UE; vgl 1-d Fall [2] Prop 1.17] dass die Grundoperationen für Fkt auch im mehrdim Fall die Stetigkeit erhalten.

(i) Seien $f, g: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ stetig in $a \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann ist auch

$$\lambda f + \mu g : U \to \mathbb{R}^m \quad \Big[(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) \Big]$$

in $\mathbb{R}^m$

stetig in a. Falls $m = 1$, dann ist auch

$$f \cdot g : U \to \mathbb{R}$$

stetig und falls zusätzlich $g(a) \neq 0$, dann ist auch

$$f/g : U \setminus \{x \in U : g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$

stetig in a.

Bemerke: Die Menge der Fkt $f: A \to B$ „erbt" die Struktur des Zielraums?

(ii) Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ stetig in $a \in U$, $f(U) \subseteq V$.
Sei $g: \mathbb{R}^m \supseteq V \to \mathbb{R}^l$ stetig in $b = f(a) \in V$. Dann ist ist auch

$$g \circ f : U \to \mathbb{R}^l$$

stetig in $a \in U$. [Kurz: Die Verknüpfung stetiger Fkt ist stetig.]

2.11 Bsp (Stetige Fkt)

(i) Wegen 2.10(i) ist jedes Polynom in n-Variablen stetig
zB: $p(x,y,z) = 7x^2yz^3 + 5xy^2 + 3x^3z^5$.
Insbesondere sind lineare Fkt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots \qquad + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

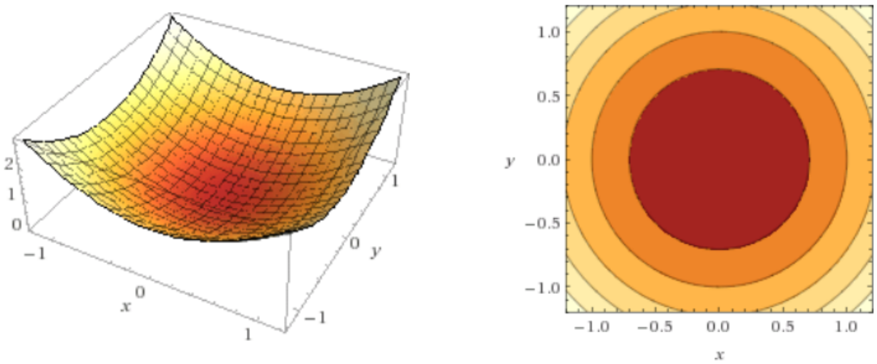
$$= A \cdot x \quad \left[\text{mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \right] \text{ stetig auf } \mathbb{R}^n$$

[Matrix · Vektor; lin Alg ...]

(ii) Sei $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Dann ist q stetig wegen (i) und $q(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Weiters ist $\sqrt{} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und daher wegen 2.10(ii) die sog. Radiusfkt

$$r: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

stetig auf $\mathbb{R}^n$.



[Die Radiusfkt auf $\mathbb{R}^2$]

2.12 BEM (Projektionen, Komponentenfkt & Stetigkeit)

Die Projektionen aus 2.9(ii) können verwendet werden, um die Komponentenfkt auszudrücken. Genauer sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ und seien $p_j(x) = x_j$ $(1 \leq j \leq m)$ die Projektionen in $\mathbb{R}^m$. Dann gilt [offensichtlich] für die Komponentenfkt von f

$$f_j = p_j \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad (1 \leq j \leq m)$$

Ist f also stetig, so folgt aus 2.10(ii), 2.9(iii) die Stetigkeit der f_j $(1 \leq j \leq m)$, die wir allerdings schon aus 2.8 haben...

[Nun zur angekündigten Überraschung!]

2.13 WARNUNG (partiell/separat stetig $\not\Rightarrow$ stetig)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die partiellen Abbildungen

$$x \mapsto f(x,0) \quad \text{und}$$
$$y \mapsto f(0,y)$$

beide stetig bei $x=0$ bzw $y=0$ sind. Man sagt dann, f ist separat oder partiell stetig bei 0 [$=(0,0)$]

Dann muß f trotzdem nicht stetig in $(x,y)=(0,0)$ sein! [Cauchy hat das 1821 in einem Buch fälschlicherweise behauptet.]

Ein explizites Gegenbsp [Peano 1884] ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- f ist stetig $\forall (x,y) \neq (0,0)$ als rationale Fkt ohne Nullstellen im Nenner [2.10(ii)].
- Die partiellen Fkt

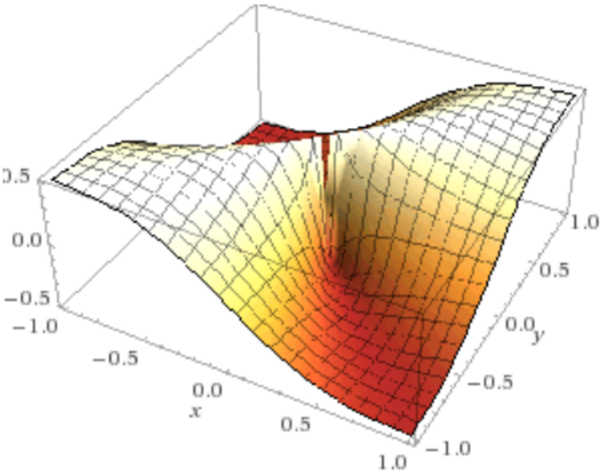
$$x \mapsto f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$y \mapsto f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

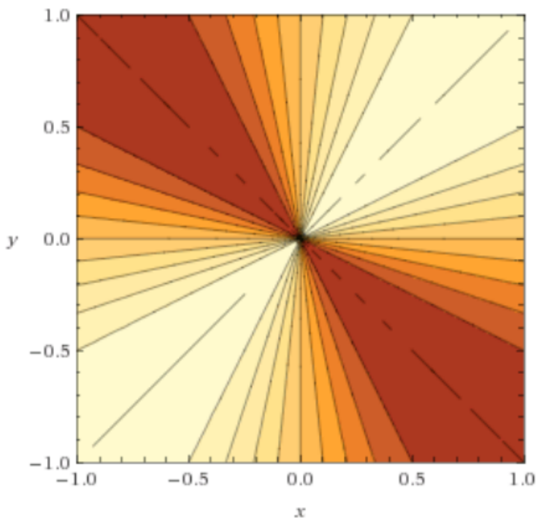
sind offensichtlich stetig auf $\mathbb{R}$ also auch in $x=0$ bzw $y=0$.

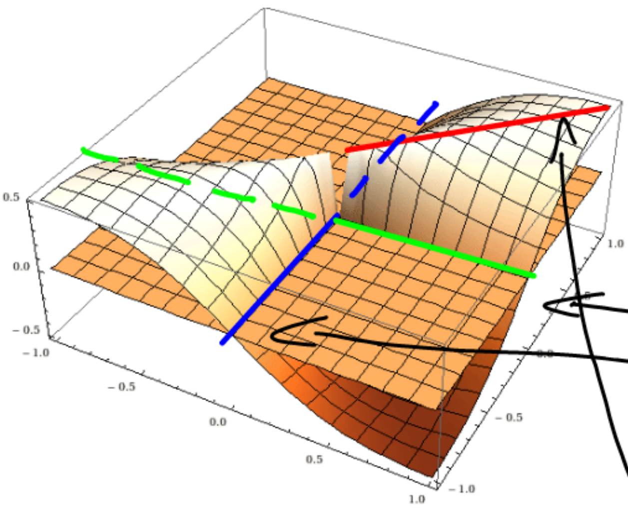
- Aber f ist nicht stetig in $(0,0)$. (Um das explizit zu sehen betrachten wir die spezielle Nullfolge $x^{(k)}=(1/k, 1/k)$. Es gilt

$$f(x^{(k)})=f\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)=\frac{1/k^2}{1/k^2+1/k^2}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0,0)$$

- Was ist hier passiert? Eine graphische Analyse zeigt:







- Der Graph ist eine „Klippenlandschaft" nahe $(0,0)$.
- Die partiellen Flt „merken" die Gefahr nicht
- f läuft längs der Nullfolge $(1/k, 1/k)$ auf dem Kamm, d.h. $f(1/k, 1/k)=1/2$ und daher ins Verderben bei $(0,0)$!

FAZIT: Verwechsle nie partielle Funktionen mit Komponentenflt.! [vgl 2.3(iii)]

2.14 AUSBLICK (Stetige Fkt auf kompakten Mengen)

Schon im 1-d-Fall ist die Sonderrolle kp. Intervall für stetige Fkt aufgefallen [vgl [2] 2.1]. Ganz allgemein [d.h. in top. Räumen] gilt, dass stetige Fkt kp Mengen „richtig transportieren", denn

$$\boxed{\text{stetige Bilder kp Mengen sind kp,}}$$

d.h.: f stetig, K kp $\Rightarrow f(K)$ kp.

Wir erwähnen hier konkret zwei Aussagen, die direkte Verallgemeinerungen ihrer 1-d Spezialfälle sind. Die Beweise erhält man durch geeignetes Umschreiben der 1-d Beweise [UE].

2.15 PROP (Stetige Fkt auf kp Mengen)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und sei $f: K \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann gilt

(i) Falls $m=1$, also $f: K \to \mathbb{R}$, so ist f beschränkt & nimmt Minimum & Maximum an [d.h. $\exists \xi, \eta \in K$ sodass $f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta)\ \forall x \in K$]

(ii) f ist gleichmäßig stetig, d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ (unabhängig von x!) sodass $\forall x, y \in K$ mit $\|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

§3 DIFFERENZIERBARE FUNKTIONEN

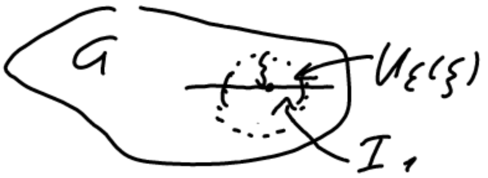
3.1 INTRO. In diesem § beginnen wir unser Studium der mehrdim Differentialrechnung indem wir uns um den Kernbegriff der Differenzierbarkeit einer Fkt $f: \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^m$ kümmern. Wie bereits in A.4 erklärt, kann eine Theorie der Diffbarkeit solcher Fkt nicht auf dem Begriff des Differentialquotienten aufgebaut werden, sondern bedient sich der Charakterisierung der Ableitung als lineare Bestapproximation [[13] Thm. 1.18] - diese kann ganz einfach ins Mehrdimensionale übertragen werden. fast wortwörtlich

Trotzdem beginnen wir mit einem Studium der Ableitungen der partiellen Funktionen [vgl. 2.3(ii)], den sogenannten partiellen Ableitungen. Da die partiellen Fkt auf $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind, ist konzeptionell alles klar. Gewarnt durch 2.13 können wir uns wohl kaum Hoffnungen darauf machen, dass die Diffbarkeit der part. Fkt die Diffbarkeit der Fkt selbst einfängt. Dem ist tatsächlich so, aber es wird sich herausstellen, dass die part. Ableitungen der Schlüssel zum Berechnen der Ableitung diffbarer Fkt sind.

3.2 MOTIVATION (partielle Ableitungen) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f: G \to \mathbb{R}$ eine Fkt und sei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in G$.

Die partielle Fkt $x_1 \mapsto f(x_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ ist zumindest

auf einem kleinen offenen Intervall $I_1 \ni \xi_1$ definiert
[G offen $\Rightarrow \exists\, U_\varepsilon(\xi) \subseteq G$; definiere $I_1 = U_\varepsilon(\xi) \cap \{(x_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$
2-d Veranschaulichung



]

und wir können $I_1 \ni x_1 \mapsto f(x_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ auf Diffbarkeit untersuchen. Falls die Ableitung im Pkt $x_1 = \xi_1$ existiert, d.h. falls

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h e_1) - f(\xi)}{h} \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ 0 \neq h \text{ und} \\ \xi_1 + h \in I_1 \end{array} \right.$$

existiert und endlich ist, dann werden wir <u>f in ξ</u> <u>partiell diffbar nach x_1 nennen</u> und die Ableitung mit

$$D_1 f(\xi) \text{ oder } \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) \text{ oder } \partial_{x_1} f(\xi)$$

bezeichnen – offizielle Def unten.

Analog dazu können wir natürlich die anderen partiellen Fkt betrachten, also $(1 \leq i \leq n)$

$$x_i \mapsto f(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, x_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)$$

und erhalten die <u>i-te partielle Ableitung</u> $D_i f(\xi)$ in ξ.

Also erhalten wir die i-te partielle Ableitung durch Festhalten aller anderen Variablen $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ und übliches (1-d) Differenzieren in der i-ten Variable.

Jetzt offiziell:

3.3 DEF (partielle Ableitung) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f: G \to \mathbb{R}$ eine Fkt und sei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in G$.

(i) Falls die i-te partielle Fkt ($1 \le i \le n$)

$$x_i \mapsto f(\xi_1, \dots \xi_{i-1}, x_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n)$$

im Pkt $x_i = \xi_i$ differenzierbar ist, so heißt f in ξ partiell nach x_i (oder nach der i-ten Koordinate) diffbar und wir bezeichnen diese partielle Ableitung nach x_i (nach der i-ten Koordinate)

$$D_i f(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) = \partial_{x_i} f(\xi) = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{f(\xi + h e_i) - f(\xi)}{h}$$

(ii) Falls f in ξ nach allen Variablen $x_1, \dots, x_n$ partiell diffbar ist, so nennen wir f partiell diffbar in ξ.

(iii) Falls f in allen $\xi \in G$ partiell diffbar ist, so nennen wir f partiell diffbar (auf G).

3.4 BSP (part. Abl.) [ganz einfach!]

So tun, ob s bzw. t Konstante wären

(i) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(s,t) = se^t + \sin(st)$

$$D_1 f(s,t) = \frac{\partial f}{\partial s}(s,t) = e^t + t\cos(st), \quad D_2 f(s,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) = se^t + s\cos(s,t)$$

(ii) $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + xy^2 + z^3$

$$D_1 g(x,y,z) = \partial_x g(x,y,z) = 2x + y^2, \quad D_2 g(x,y,z) = \partial_y g(x,y,z) = 2xy$$

$$D_3 g(x,y,z) = \partial_z g(x,y,z) = 3z^2$$

3.5 BEM (Höhere part. Abl. & eine wichtige Frage)

Sei wiederum $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in G$, $f: G \to \mathbb{R}$.

(i) Falls f auf G partiell diffbar ist, so erhalten wir n-Stück Fkt

$$D_1 f: G \to \mathbb{R}, \dots, D_n f: G \to \mathbb{R}$$

Falls $D_i f$ in $\xi \in G$ partiell nach x_j diffbar ist, so erhalten wir eine partielle Ableitung 2. Ordnung von f im Pkt $\xi \in G$, genauer erhalten wir die part. Abl 2. Ordnung

$$D_j D_i f(\xi)$$

Auf diese Weise erhalten wir n^2-Stück partielle Ableitungen 2. Ordnung.

(ii) Falls $D_j D_i f$ auf ganz G existiert und in $\xi \in G$ nach x_ℓ partiell diffbar ist, so erhalten wir die part. Abl. 3. Ordnung in ξ

$$D_\ell D_j D_i f(\xi)$$

usw, usw.

(iii) Eine wichtige Frage, die sich nun stellt ist, ob bei den gemischten partiellen Ableitungen, zB $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_1 f$ die Reihenfolge der Differentiation wesentlich ist oder nicht, d.h ob etwa

$$D_1 D_2 f(\xi) = D_2 D_1 f(\xi) \text{ gilt oder nicht.}$$

d.h. nicht von der Form $D_i D_i D_i \dots D_i f$

Die Antwort ist i.a. NEIN [siehe UE]; unter der milden Voraussetzung, dass die betroffenen part. Ableitungen stetig sind lautet sie aber JA.

Bevor wir das einschlägige Resultat formulieren & beweisen, ein Bsp.

3.6 BSP (Höhere part. Abl.) Wir betrachten nochmals $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g(x,y,z)=x^2+xy^2+2z^3$. Lt 3.4(iii) gilt

$$D_1 g = 2x+y^2,\quad D_2 g = 2xy,\quad D_3 g = 6z^2 \quad \text{und daher}$$

$$\begin{array}{lll} D_1D_1 g = 2, & D_1D_2 g = 2y, & D_1D_3 g = 0 \\ D_2D_1 g = 2y, & D_2D_2 g = 2x, & D_2D_3 g = 0 \\ D_3D_1 g = 0, & D_3D_2 g = 0, & D_3D_3 g = 12z \end{array}$$

vertauschen alle D!

3.7 SATZ (von Schwarz) Sei $G\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $\xi\in G$, $f:G\to\mathbb{R}$. Falls D_iD_jf und D_jD_if $(1\le i,j\le n)$ auf G existieren und in ξ stetig sind, so gilt

$$D_iD_j f(\xi) = D_jD_i f(\xi)$$

nicht vorgetragen

3.8 BEM (zum Satz v. Schwarz)

(i) Wie aus dem Beweis ersichtlich genügt die Existenz von D_iD_jf und D_jD_if auf einer (kleinen) Umgebung von ξ.

(ii) Induktiv ergibt sich natürlich eine analoge Aussage für partielle Ableitungen höherer Ordnung; d.h. {Gemischte part. Abl. vertauschen, falls sie stetig sind!}

Beweis von 3.7: [lange & technisch aufwendige Anwendung des MWS]

(1) Vorbereitung 1: (2-d Spezialfall genügt)

Es genügt den Satz für $n=2$ zu zeigen, denn oBdA sei $x_i = x$, $x_j = y$ und alle anderen Variablen werden ohnehin festgehalten.

Sei also $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(\xi,\eta) \in G$, $f: G \to \mathbb{R}$ und D_1D_2f, $D_2D_1f: G \to \mathbb{R}$ stetig. Zu zeigen ist, dass

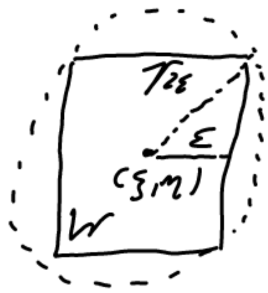
$$D_1D_2 f(\xi,\eta) = D_2D_1 f(\xi,\eta)$$

NICHT VORGETRAGEN

(2) Vorbereitung 2: (Festlegen der Umgebungen)

Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $U_{\sqrt{2}\varepsilon}(\xi,\eta) \subseteq G$.

$\Longrightarrow W := [\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon] \times [\eta-\varepsilon, \eta+\varepsilon] \subseteq U_{\sqrt{2}\varepsilon}(\xi,\eta) \subseteq G$



$U_{\sqrt{2}\varepsilon}(\xi,\eta)$

Seien $\alpha, \beta \neq 0$, $|\alpha|, |\beta| < \varepsilon$

$\Longrightarrow [\xi-|\alpha|, \xi+|\alpha|] \times [\eta-|\beta|, \eta+|\beta|] \subseteq W$

(3) Darstellung von D_2D_1f

Setze $\varphi(x) := f(x,\eta+\beta) - f(x,\eta)$ für $x \in [\xi-|\alpha|, \xi+|\alpha|]$

$\overset{MWS}{\Longrightarrow} \exists x_1 \in [\xi-|\alpha|, \xi+|\alpha|]$:

$$\varphi(x+\alpha) - \varphi(x) = \alpha\,\varphi'(x_1) = \alpha\big(D_1f(x_1,\eta+\beta) - D_1f(x_1,\eta)\big) = (*)$$

Setze $\psi_1(y) := D_1f(x_1,y)$ für $y \in [\eta-|\beta|, \eta+|\beta|]$

$$\Longrightarrow \quad (*) = \alpha\big(\psi_1(\eta+\beta) - \psi_1(\eta)\big) \qquad (\Delta)$$

$$\overset{\text{MWS}}{\Longrightarrow} \exists y_1 \in [\eta-|\beta|, \eta+|\beta|]$$

$$\varphi(\xi+\alpha)-\varphi(\xi) \overset{(\Delta)}{=} \alpha\beta\,\varphi_1'(y_1) = \alpha\beta\, D_2D_1 f(x_1,y_1) \qquad (\square)$$

(4) Darstellung von D_1D_2:

NICHT VORGETRAGEN

Setze $\psi(y) := f(\xi+\alpha,y)-f(\xi,y)$ für $y\in[\eta-|\beta|,\eta+|\beta|]$
Wie in (3) gilt nun mit (2-maliger Anwendung des) MWS: $\exists x_2\in[\xi-|\alpha|,\xi+|\alpha|]$, $y_2\in[\eta-|\beta|,\eta+|\beta|]$ sodass

$$\psi(\eta+\beta)-\psi(\eta)=\beta\,\psi'(y_2)=\beta\big(D_2f(\xi+\alpha,y_2)-D_2f(\xi,y_2)\big)$$
$$= \beta\alpha\, D_1D_2 f(x_2,y_2) \qquad (\square\square)$$

(5) Die beiden Darstellungen stimmen überein: Es gilt

$$\varphi(\xi+\alpha)-\varphi(\xi) = f(\xi+\alpha,\eta+\beta)-f(\xi+\alpha,\eta)-f(\xi,\eta+\beta)+f(\xi,\eta)$$
$$= f(\xi+\alpha,\eta+\beta)-f(\xi,\eta+\beta)-\big(f(\xi+\alpha,\eta)-f(\xi,\eta)\big)$$
$$= \psi(\eta+\beta)-\psi(\eta)$$

$$\overset{(\square),(\square\square)}{\Longrightarrow} \alpha\beta D_1D_2 f(x_2,y_2) = \alpha\beta D_2D_1 f(x_1,y_1)$$

$$\overset{\alpha,\beta\neq 0}{\Longrightarrow} D_1D_2 f(x_2,y_2) = D_2D_1 f(x_1,y_1)$$

(6) Abschluss: $\alpha,\beta\to 0$: Wir betrachten nun den Limes

$$(\alpha,\beta)\to(0,0) \Longrightarrow (x_1,y_1)\to(\xi,\eta)\leftarrow(x_2,y_2)$$

$$\xrightarrow[\text{[2] 1.26}]{D_1D_2f,\ D_2D_1f \text{ stetig!}} D_1D_2 f(\xi,\eta) = D_2D_1 f(\xi,\eta) \qquad \square$$

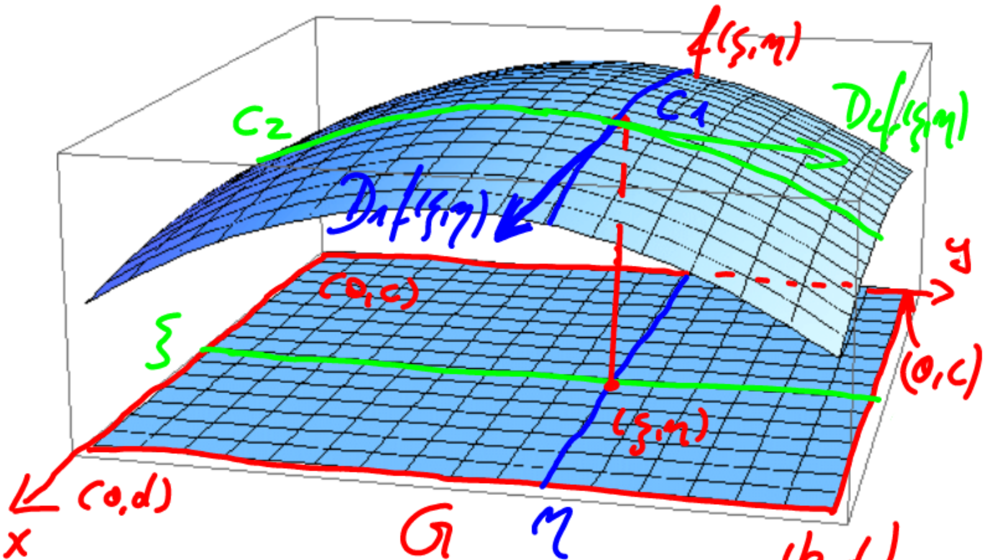
3.9 Rückblick & Ausblick (Differenzierbarkeit)

(i) Was wir bis jetzt getan haben: Wir wollen die Bedeutung der part. Ableitungen graphisch darstellen. Sei dazu $G := (a,b) \times (c,d)$ ein offenes Rechteck im $\mathbb{R}^2$, $(\xi,\eta) \in G$ und $f: G \to \mathbb{R}$ part. diffbar. Wir betrachten die part. Fkt.

$$g: x \mapsto f(x,\eta)$$
$$h: y \mapsto f(\xi,y)$$

und zeichnen sie im Graphen $\Gamma(f) = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in G\}$ ein:

- g beschreibt die Kurve c_1, die durch Schnitt von $\Gamma(f)$ mit der Ebene $y=\eta$ entsteht.
- h beschreibt die Kurve c_2, die durch Schnitt $\Gamma(f)$ mit der Ebene $x=\xi$ entsteht



- Daher ist $D_1f(\xi,\eta) = g'(\xi)$ der Anstieg von c_1 im Pkt $(\xi,\eta,f(\xi,\eta))$
und $D_2 f(\xi,\eta) = h'(\eta)$ —— " —— c_2 —— " ——

(ii) FAZIT: Die Information, die in D_1f, D_2f steckt bezieht sich nur auf die Änderung von f

in 2 sehr speziellen Richtungen – nämlich den Koordinatenrichtungen. Ohne weitere Zusatzbedingungen sagen $\partial_1 f, \partial_2 f$ <u>nichts</u> über die Änderung von f in allen anderen Richtungen aus!

Diese Information wird also nicht ausreichen um einen guten Differenzierbarkeitsbegriff daraus aufzubauen. Daher <u>erinnern</u> wir uns an

(iii) Differenzieren als lin. Approximation im 1-d Fall

[3] Thm. 1.19 besagt für $f: \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$, $\xi \in I$, I ein Intervall

$$
\begin{aligned}
& \exists a \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta > 0 \;\; \exists\, r: (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}: \\
f \text{ diffbar in } \xi \iff\; & f(\xi+h) - f(\xi) = a h + r(h) \quad \forall |h| < \delta \text{ mit } \xi + h \in I \\
& \text{und} \quad \frac{r(h)}{h} \to 0 \; (h \to 0)
\end{aligned}
$$

Bemerke [vgl. [3] 1.20], dass dabei

$$\mathbb{R} \ni h \mapsto a \cdot h \in \mathbb{R}$$

eine <u>lineare</u> Fkt ist, die die Inkrementfkt

$$\varphi(h) := f(\xi+h) - f(\xi)$$

beschreibt die Änderung von f nahe ξ

approximiert; es ist außerdem $a = f'(\xi)$.

Dieser Aspekt der Diffbarkeit lässt sich nun gut auf den Fall $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ verallgemeinern. Bevor wir das tun noch eine allgem. Bemerkung

3.10 Strategische Bemerkung (Verallgemeinerungen am besten Weg?!)

Unsere Vorgehensweise beim Verallgemeinern des Begriffs der Diffbarkeit von 1-d auf n-d Definitionsbereich folgt einer in der Mathematik weitverbreiteten Strategie beim Verallgemeinern von Begriffen. Daher wollen wir sie genauer betrachten:

$n=1$: (Definition via Differentialq. $\overset{[3]\,1.1P}{\Longleftrightarrow}$ Char. mittels lin. Approx.)

Verallgemeinerung $\downarrow$ Verallg. $\downarrow$

$n>1$: ~~$\neq$~~ NEIN; A.4! ✓

Der Begriff der Diffbarkeit kann im Fall $n=1$ durch die lin. Approximation des Inkrements vollständig charakterisiert werden. Während die ursprüngliche Def mittels Differentialquotienten sich nicht auf den Fall $n>1$ verallgemeinern lässt, ist dies für die in $n=1$ äquivalente Formulierung aus [3] 1.1P sehr wohl [und zwar sehr direkt!] möglich.

Falls in der math. Forschung ein Begriff verallgemeinert werden soll, steckt oft viel Arbeit & Kreativität im 0. Schritt, indem man die für die Verallgemeinerung am besten geeignete äquivalente Formulierung des Begriffs findet — oft muss sie überhaupt erst neu erfunden werden!

3.11 DEF (Differenzierbarkeit) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to \mathbb{R}^m$.

(i) Die Fkt f heißt <u>differenzierbar im Pkt</u> $\xi \in G$, falls

$$\exists A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linear}, \ \exists \delta > 0 \ \exists r: \mathbb{R}^n \supseteq U_\delta(0) \to \mathbb{R}^m \text{ sodass}$$

$$f(\xi+h) - f(\xi) = A \cdot h + r(h) \quad \forall h \in U_\delta(0) \text{ mit } \xi + h \in G$$

und $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$

(ii) Ist f diffbar in allen Pkten $\xi \in G$, dann nennen wir f <u>diffbar (auf G)</u>.

3.12 BEM (zur Def der Diffbarkeit)

(i) (Offener Defbereich) Wir beschränken uns bei der mehrdim Diffbarkeit auf <u>offene</u> Definitionsbereiche. Anders als im 1-d Fall kann man sich dem Rand des Defbereichs aus vielen Richtungen nähern, was die Sache sehr verkomplizieren würde.

einseitige; hier linksseitige Abl leicht zu definieren $\boxed{3}$ 1.7(iii)

(ii) (Übereinstimmung im Fall $n=1=m$) Def 3.11 reduziert sich im Fall $n=1=m$ tatsächlich auf die Bedingung in $\boxed{3}$ 1.19 – vgl 3.9(iii). Dabei ist die lin. Abbildung A dargestellt durch die 1×1-Matrix $a = f'(\xi) \in \mathbb{R}$.